

Torsión de prismas de sección rectangular

POR EL ING. ARGENTINO

D. ROBERTO KURTZ.

De una memoria presentada a la Academia de Ciencias de la Universidad de Buenos Aires por Roberto Kurtz y que también fué presentada al Congreso Científico Panamericano de Lima, extractamos la parte que se refiere a la solución de un problema práctico que hasta ahora no había tenido una solución satisfactoria: la torsión de prismas de sección rectangular.

En este trabajo que se titula «Investigaciones sobre Elasticidad» se proponen las bases de una nueva teoría o un nuevo método de investigación en los fenómenos de Elasticidad y se aplican luego al caso particular de este problema.

Vamos a explicar brevemente y en sus lineamientos generales el razonamiento con que el autor funda sus fórmulas para el cálculo del momento de torsión y de los esfuerzos moleculares en los prismas rectangulares.

I.—ANTECEDENTES

Para la mejor inteligencia de esta síntesis, conviene hacer antes una breve reseña del estado actual de las cuestiones que trata.

Representamos en la fig. 1. la proyección de un cilindro sometido a un esfuerzo de torsión. Imaginemos que la base N ha sido obligada a girar sobre sí misma, permaneciendo fija la base M de tal manera que la generatriz mn ha pasado a ocupar

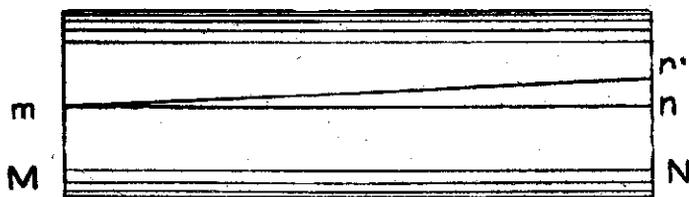


Fig. 1

la posición mn' . Es evidente que todos los elementos de dicha generatriz habrán sufrido una deformación angular representada por el ángulo

$$\text{tang } \gamma = \frac{nn'}{mn}$$

Llamando r al radio del cilindro y designando con la letra griega ϕ el ángulo de torsión tendremos

$$\text{tang } \phi = \frac{nn'}{r}$$

Es evidente que para ángulos pequeños podemos poner, llamando L a la longitud del prisma,

$$\gamma = \frac{\phi r}{L}$$

Si llamamos S al esfuerzo elemental y G al coeficiente de resistencia al resbalamiento, es evidente que

$$S = G \gamma = \frac{G \phi r}{L}$$

Fórmula aplicable a cualquiera de los elementos de cualquiera de las generatrices o en otras palabras a cualquiera de los elementos superficiales del cilindro.

Entremos ahora a considerar la sección transversal del prisma, representada en la fig. 2.

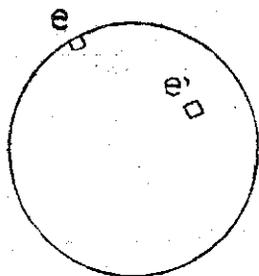


Fig. 2

El esfuerzo en el elemento e nos lo da la fórmula anterior y el momento de torsión elemental m que ese esfuerzo origina es

$$m = \frac{G \phi r^2}{L}$$

Para otro elemento tal como e' situado a una distancia r' del centro, obtendríamos

$$m' = \frac{G \phi r'^2}{L}$$

El momento de torsión total en la sección del prisma sería:

$$M = m + m' + m'' \dots = \frac{G \phi}{L} (r^2 + r'^2 + r''^2 \dots)$$

La suma de los términos entre paréntesis no es otra cosa que el momento de inercia polar de la sección a que llamaremos I_p .

Así llegamos a la fórmula universalmente aceptada para el momento de torsión de los prismas cilíndricos

$$M = \frac{G \phi}{L} I_p$$

La nueva teoría deja en pie esta fórmula como todo lo expuesto hasta aquí en relación con los prismas cilíndricos.

Es cuando se pasa a las secciones rectangulares que se ponen en evidencia los errores de las teorías actuales y la utilidad de la nueva teoría.

En realidad, el problema nunca fué resuelto y la mayoría de los autores así lo reconocen, limitándose a dar algunas fórmulas empíricas o de pura especulación abstracta. Por primera vez surge una hipótesis que posiblemente corresponde al fenómeno real y que, mediante la comprobación experimental puede aspirar a convertirse en una verdad científica.

En las secciones cilíndricas es evidente que el esfuerzo elemental es proporcional a la distancia del elemento considerado al centro de rotación. De allí surge la fórmula que da el valor del momento de torsión en función del momento de inercia polar. Pero cuando se ha querido extender la misma fórmula a las secciones rectangulares, la experiencia ha demostrado su inexactitud, en especial cuando se trata de rectángulos de pequeña base con relación a la altura. Haciendo variar las dimensiones de los lados del rectángulo se observa que en algunos casos el momento de inercia polar aumenta y la resistencia a la torsión disminuye.

Es evidente entonces que cuando salimos de la sección circular, los esfuerzos elementales ya no son proporcionales a las distancias al centro de rotación.

La nueva teoría conduce a admitir que los esfuerzos elementales son iguales en toda la periferia del cuerpo, ya sea un prisma rectangular o circular y que disminuyen hasta anularse en una región central que se llama núcleo neutro.

En el rectángulo el núcleo neutro es una recta como se representa en la fig. 12; en el círculo se reduce a un punto.

La teoría de la torsión de los cilindros admitida hasta hoy sigue siendo exacta, pero en vez de considerar que los esfuerzos elementales varían según una ley de crecimiento a partir del centro, debe considerarse que obedecen a una ley de decrecimiento a partir del perímetro. Enunciada en esta forma es aplicable al rectángulo y probablemente a todas las secciones como quizás se llegue a comprobar en investigaciones posteriores.

Ofrece también interés la aplicación de la nueva teoría al desplazamiento de las fibras en el sentido longitudinal del prisma. Muchos autores admiten que las secciones del prisma, planas antes de la deformación, dejan de serlo después. Es claro que para ello es necesario que las fibras longitudinales sufran algunos desplazamientos en el sentido del eje del prisma. La nueva teoría ofrece el medio de calcular exactamente el desplazamiento de cada fibra y esta circunstancia permitiría su comprobación experimental por medio de aparatos micrométricos.

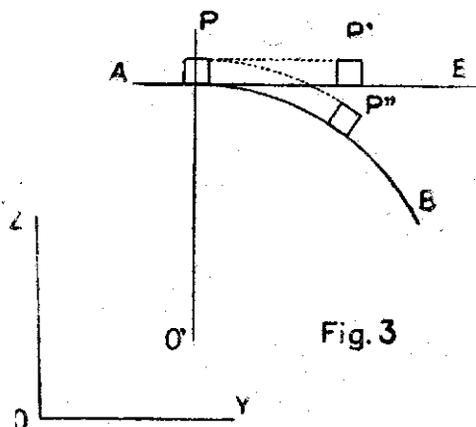
11.—HIPOTESIS FUNDAMENTAL

En la Memoria, está expuesta en la forma siguiente:

«La torsión es un fenómeno complicadísimo, que ha de tardar mucho en ser conocido en toda su complejidad. Por eso nos limitamos a estudiarlo dentro de condiciones muy limitadas, considerando solamente prismas sometidos a ángulos de torsión muy pequeños. Por otra parte, este es el caso más general en la práctica.

«Esto sentado, partiremos de una hipótesis fundamental y no nos detendremos a demostrar su verosimilitud. Ella nos conduce a conclusiones objetivas y concretas que están sujetas a comprobación experimental. No hay, pues, inconveniente en admitirla provisionalmente, ya que la prueba experimental de las conclusiones comprobará a la vez la exactitud de la hipótesis.

«Supongamos una lámina material AB y reposando sobre ella un prisma P. (fig. 3). Imaginemos haber desplazado el extremo anterior P. del prisma por sobre la lámina hasta la posición P' e imaginemos que por medio de un sistema de fuerzas exteriores deformamos la lámina hasta convertirla en una superficie cilíndrica con eje en O', manteniendo siempre adherido el prisma.



«La hipótesis fundamental consiste en admitir que las deformaciones sufridas por el prisma en estas dos operaciones sucesivas son las mismas que hubiera sufrido si hubiésemos desplazado mediante un sistema de fuerzas exteriores la base anterior P del prisma hasta la posición P'' por sobre la superficie cilíndrica A B'.

«Admitida, bien sea con carácter provisional, esta hipótesis, podremos empre-

«der el estudio de las deformaciones del prisma en las dos etapas imaginarias sucesivas del fenómeno.

«En la fig. 4 representamos la primera. No hay en ella otra deformación que el alargamiento del prisma desde la longitud $Q P$ hasta $Q P'$. Recordaremos aquí que cuando en un triángulo rectángulo uno de los catetos es un infinitamente pequeño del primer orden, la diferencia entre la hipotenusa y el otro cateto es un in-

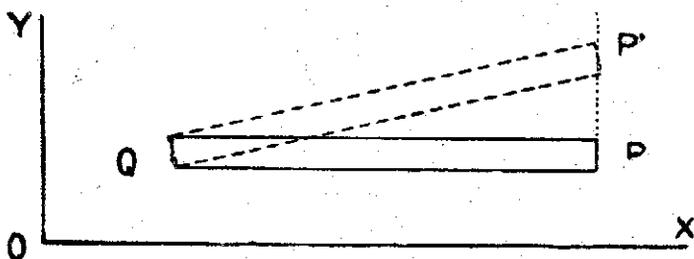


Fig. 4

«finitamente pequeño del segundo orden. La distancia $P P'$ es finita, pero podemos asignarle un valor tan pequeño que el alargamiento del prisma resulte despreciable. Nos colocamos así dentro de las condiciones limitadas en que estudiamos el fenómeno de la torsión.

«Conviniendo en despreciar el alargamiento, no queda en esta primera etapa ninguna deformación que considerar, pues en realidad el prisma no ha sido deformado, sino simplemente desplazado.

«Para fijar ideas y para mayor claridad de las demostraciones posteriores, adoptaremos algunas denominaciones. Llamaremos desplazamiento virtual al que acabamos de describir y ángulo de desplazamiento virtual al ángulo $P Q P'$.

«Si observamos ahora la posición que toman las diversas fibras longitudinales del prisma con relación al sistema de ejes considerado, notaremos que si una fibra estaba comprendida entre los valores x_1 y x_2 antes del desplazamiento virtual, después del mismo, estará comprendido entre los valores

$$x_1 + \Delta x$$

$$x_2 + \Delta x$$

«pudiendo ser Δx positivo, negativo o nulo según la posición de la fibra con relación al eje del prisma.

«Es fácil calcular el valor de Δx para todas y cada una de las fibras del prisma y a ese valor le llamaremos desplazamiento real de la fibra».

Pasemos ahora a considerar las deformaciones que se producen en la segunda etapa imaginaria del fenómeno.

En la memoria presentada se demuestra que para ángulos de torsión muy pequeños los esfuerzos de compresión o tracción o flexión son nulos o despreciables y que lo único que corresponde tomar en cuenta son las deformaciones angulares.

Si cortamos el prisma de la figura 3 con dos planos normales a su eje y distantes uno de otro una distancia igual al lado de la base del mismo, la parte del prisma comprendida entre dichos dos planos constituía antes de la deformación un cubo que aparece ahora con deformaciones angulares bien definidas.

Proyectando una sobre otra las intersecciones obtenidas sobre los dos planos, notamos que la cara anterior del cubo ha sufrido una deformación angular con relación a la cara posterior. Por otra parte, las caras laterales antes cuadradas se han convertido en rombos.

Al conjunto de estas deformaciones llamaremos torsión elemental. No tendría mayor importancia continuar su análisis, ya que quedan perfectamente caracterizadas con el ángulo que acabamos de definir y que representamos en la fig. 5.

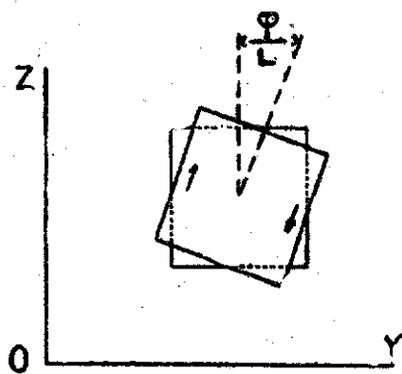


Fig. 5

Es evidente que si llamamos L a la longitud del prisma, el ángulo de torsión elemental es

$$\frac{\phi}{L}$$

Este valor indica claramente que la torsión elemental es la misma para todos los elementos del prisma y que es independiente de la posición del prisma con relación al eje de rotación.

La torsión elemental se debe a pares elementales que se originan según explica la memoria en la variación de las fuerzas tangenciales y cuyo valor se deduce de la derivada de la ecuación de los esfuerzos moleculares.

III.—DESPLAZAMIENTO REAL DE LAS FIBRAS LONGITUDINALES

En este capítulo y los siguientes sustituimos las tangentes y senos por la longitud del arco tomando el radio por unidad, sustitución admisible tratándose de ángulos que en la práctica son muy pequeños, aunque en las figuras aparecen agrandados para la claridad de la demostración. Esto dará gran sencillez a las fórmulas.

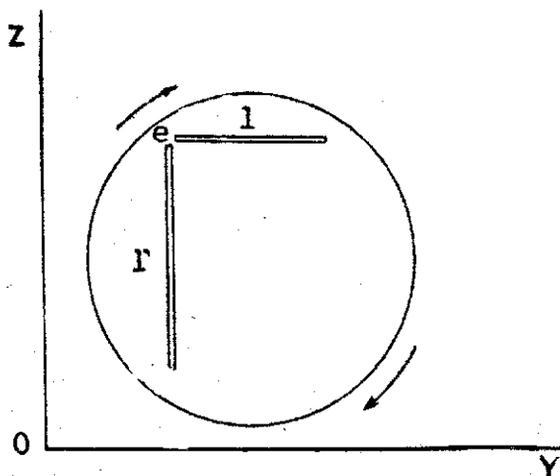
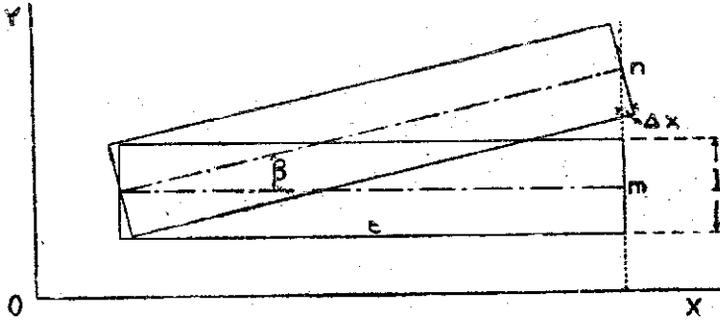


Fig. 6

Consideremos ahora un prisma l de base rectangular en forma de lámina que podemos suponer tan delgada como se quiera (fig. 6) sometida a torsión. Para determinar los desplazamientos reales de las fibras de esta lámina construiremos la fig. 7 en que, considerando que la distancia de la lámina al centro es $\frac{1}{2}l'$, damos a mn la longitud.

$$m n = \frac{1}{2} \phi l'$$



Designando por β el ángulo de desplazamiento virtual, el desplazamiento real de la fibra extrema e será:

$$\Delta x = \frac{1}{2} l \beta$$

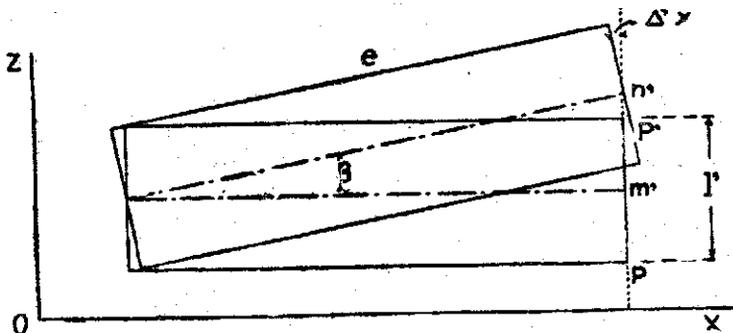
y como, llamando L a la longitud del prisma

$$\beta = \frac{m n}{L} = \frac{\frac{1}{2} \phi l'}{L}$$

resulta

$$\Delta x = \frac{\phi}{4L} l l'$$

Este valor es positivo según se deduce de la figura 7.



Consideremos ahora otra lámina l' situada con relación a la anterior en la posición que se muestra en la fig. 6. Para determinar los desplazamientos reales de sus fibras construiremos la fig. 8 en que damos a $m' n'$ la longitud.

$$m' n' = \frac{1}{2} \phi l$$

El desplazamiento real de la fibra extrema e será:

$$\Delta' x = \frac{1}{2} l' \beta'$$

y como

$$\beta' = \frac{m' n'}{L} = \frac{\frac{1}{2} \phi l}{L}$$

resulta

$$\Delta' x = \frac{\phi}{4L} l l'$$

Este valor es negativo según se deduce de la fig. 8. Comparando con la anterior, vemos que

$$\Delta x = - \Delta' x = \frac{\phi l l'}{4L} \quad (1)$$

IV.—DEFORMACIONES ANGULARES

Imaginemos ahora las dos láminas colocadas exactamente en la misma disposición que en el caso anterior, pero soldadas ambas por la arista e.

A fin de evitar toda asimetría que pueda introducir complicaciones innecesarias en el fenómeno que queremos estudiar, imaginemos estas dos láminas como formando parte de un prisma hueco constituido por cuatro láminas en la forma que representamos en la fig. 9. Las cuatro aristas se verán así sometidas a acciones simétricas que deben equilibrarse entre sí.

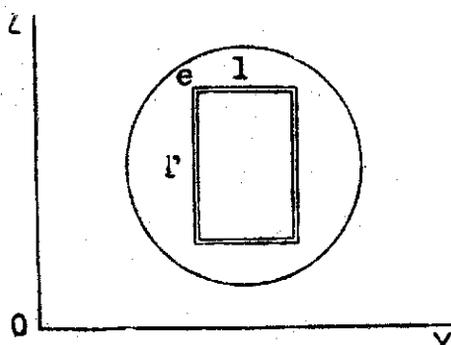


Fig. 9

Propongámonos ahora determinar cuál será el desplazamiento real de la arista *e* operando en estas condiciones.

Como perteneciente a la lámina *l* el desplazamiento sería positivo, (Δx fig. 7.) como perteneciente a la lámina *e* el desplazamiento sería negativo, ($'\Delta x$ fig. 8.) Vamos a determinar mediante la aplicación de la ley de deformaciones espontáneas cuál de las dos acciones predominará. La arista se desplazará en el sentido que implique el menor almacenamiento de energía potencial interna.

Recordaremos que el trabajo de deformación de un cubo que tenga la unidad por lado sometido a esfuerzos tangenciales como se representa en la fig. 10 tiene por expresión:

$$\frac{1}{2} G \gamma^2$$

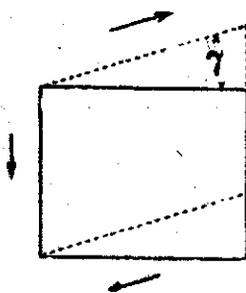


Fig. 10

Si suponemos que el desplazamiento de la arista es positivo e igual a Δx entonces toda la lámina l' estaría deformada uniformemente y el valor del trabajo total sería igual al área de la lámina (que suponemos de espesor igual a la unidad) multiplicado por la expresión que obtengamos para el trabajo de un elemento. Para determinar ésto, necesitamos determinar el ángulo de deformación molecular a que llamaremos γ_1 y cuyo valor sería:

$$\gamma_1 = \frac{\Delta x + (-\Delta'x)}{\frac{1}{2} l'} = \frac{4\Delta x}{l'}$$

y sustituyendo los valores obtenidos en el capítulo anterior y simplificando, obtenemos

$$\gamma_1 = \frac{\phi}{L} l'$$

multiplicando por el área, el trabajo total sería

$$T_1 = \frac{1}{2} L l' G \gamma_1^2 = \frac{1}{2} L l' G \left(\frac{\phi l'}{L} \right)^2$$

$$T_1 = \frac{G \phi^2 l'^2}{2 L} \quad (2)$$

Si suponemos por el contrario que el desplazamiento es negativo e igual a $\Delta'x$ entonces sería la lámina l la deformada.

El ángulo de deformación elemental sería

$$\gamma_2 = \frac{4 \Delta x}{l}$$

Y sustituyendo los valores obtenidos en el capítulo anterior y simplificando obtenemos

$$\gamma_2 = \frac{\phi}{L} l'$$

y multiplicando por el área de la lámina el trabajo total, resultaría

$$T_2 = \frac{1}{2} L I G \left(\frac{\phi l'}{L} \right)^2$$

$$T_2 = \frac{G \phi^2 l'^2}{2 L} \quad (3)$$

Comparando la (2) con la (3) es evidente que

$$T_1 < T_2$$

puesto que

$$l'^2 < l l'^2$$

Vemos, pues, que el desplazamiento real de la fibra e tenderá a ser positivo, puesto que esto implica un menor almacenamiento de energía potencial interna.

Réstanos ahora averiguar las condiciones de equilibrio.

En la forma en que operamos, las fuerzas exteriores son normales al eje de las x , es decir, al eje del prisma, y como no pueden tener ninguna componente normal a su propia dirección, es evidente que el desplazamiento de la fibra e, en el sentido del eje del prisma, se produce por esfuerzos de origen espontáneo, es decir, por esfuerzos que proceden de reacciones moleculares internas, y estas reacciones sólo pueden ejercerse sobre las caras $s s'$ y $s s''$ de la fibra e, fig. 11.

Estos dos esfuerzos tienen que ser iguales y de signo contrario. Ambos se originan en la deformación angular de los elementos en inmediato contacto con la fi-

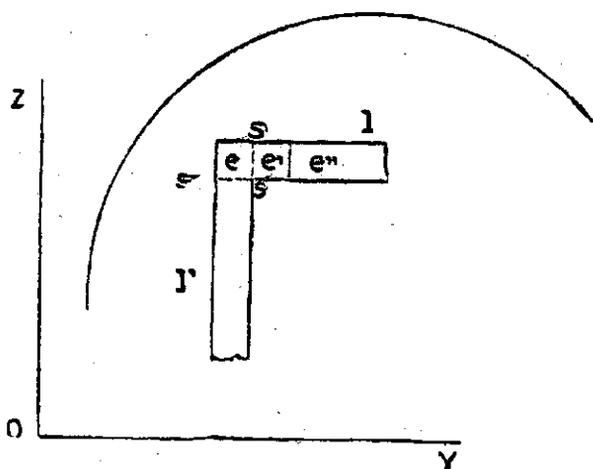


Fig. 11

bra e. Ahora bien, si el elemento e' ejerce sobre e un esfuerzo s necesita a su vez para mantenerse en equilibrio, que el elemento e'' ejerza sobre él un esfuerzo igual de donde deducimos que todos los elementos de la lámina l están uniformemente deformados bajo la acción de esfuerzos s, todos iguales.

El mismo razonamiento nos llevaría a la conclusión de que todos los elementos de la lámina l' están uniformemente deformados bajo la acción de esfuerzos todos iguales.

El valor de estos esfuerzos depende del ángulo de deformación. Vamos a calcularlo.

Llamemos d al desplazamiento real que finalmente sufrirá la fibra e y que sabemos que será positivo. La condición de equilibrio es que sean iguales los ángulos de deformación de ambas láminas. Luego deberemos tener

$$\frac{-\Delta x + d}{\frac{l'}{2}} = \frac{\Delta x - d}{\frac{l}{2}}$$

de donde obtenemos, recordando la (1), trasponiendo y simplificando

$$d = \frac{\phi}{4L} \times \frac{l l' (l' - l)}{l' + l}$$

El ángulo de deformación molecular que en definitiva sufrirán todos y cada uno de los elementos de ambas láminas y al que llamaremos γ , lo podemos calcular ahora en cualquiera de las dos. Considerando la fig. 8 obtendremos:

$$\gamma = \frac{-\Delta'x+d}{\frac{l}{2} - l'}$$

y sustituyendo los valores obtenidos en la (1) y en la (4)

$$\gamma = \frac{\phi l}{2L} + \frac{\phi l}{2L} \times \frac{l' - l}{l' + l}$$

o sea, después de toda reducción

$$\gamma = \frac{\phi}{2L} \times \frac{l l'}{l + l'} \quad (5)$$

El valor del esfuerzo elemental lo obtenemos ahora multiplicando el ángulo γ por el coeficiente de resistencia al resbalamiento a que llamamos G . Luego

$$S = \frac{G \phi}{L} \times \frac{l l'}{l + l'} \quad (6)$$

Cada elemento se ve, pues, sometido a dos fuerzas iguales y de signo contrario, de valor S , que constituyen un par que se equilibra según se demuestra en la memoria con otro par de fuerzas en el plano de los eje Z . Y . y que proceden directamente de las fuerzas exteriores.

V.—TORSIÓN DE UN PRISMA DE BASE RECTANGULAR.

Imaginemos ahora una serie de prismas rectangulares huecos como el representado en la fig. 9, tomados de manera que las dimensiones exteriores de uno correspondan exactamente a las dimensiones interiores de otro.

Coloquemos todos estos prismas huecos unos dentro de otro como se muestra en la fig. 12. Sometidos a la torsión, es evidente que todos y cada uno se comportarán como hemos explicado en el capítulo anterior.

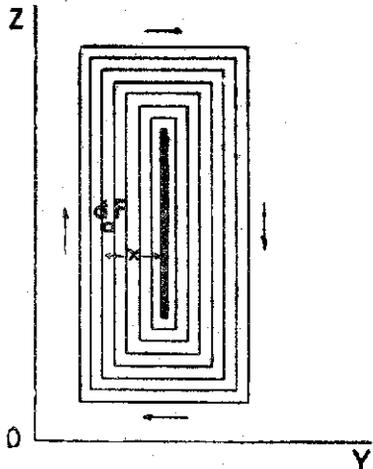


Fig. 12

Ahora bien, si procedemos a soldarlos todos uno con otros, por las caras de contacto de manera que formen un prisma sólido, no hay razón alguna para rechazar la hipótesis de que seguirán comportándose de la misma manera.

En un elemento tal como dF el esfuerzo tangencial será el mismo que nos da la fórmula (6) en que daremos a los parámetros l y l' los valores correspondientes al prisma hueco a que pertenece ese elemento.

Según eso, los esfuerzos y deformaciones elementales son uniformes en todo el perímetro, siguiendo la dirección que indican las flechas. A medida que nos alejamos del perímetro hacia el interior del prisma, los esfuerzos disminuyen en intensidad hasta anularse en la recta central que denominaremos núcleo neutro. Pasando el núcleo neutro los esfuerzos cambian de signo.

Nótase claramente la perfecta similitud de la explicación obtenida para la torsión de un prisma de base rectangular con la teoría universalmente aceptada para la torsión de los prismas cilíndricos. En éstos, el núcleo neutro se ha reducido a un punto.

Esta similitud se pone aun más de manifiesto si analizamos las fórmulas 5 y 6. Notando que l' es el área y la suma $l+l'$, la mitad del perímetro, y sustituyéndolos por los correspondientes elementos del círculo, obtenemos para la deformación y esfuerzo elementales los valores correspondientes de los prismas cilíndricos.

Vamos a calcular ahora el momento de torsión.

Notaremos ante todo que los parámetros l y l' que entran en la fórmula (6) están ligados por una relación permanente que deducimos de la fig. 12. En efecto:

$$l' = l + N$$

llamando N a la longitud del núcleo neutro.

Tomaremos, como variable independiente la distancia k del elemento superficial dF al núcleo neutro. En la fórmula (6) deberemos poner $2x$ en vez de l , y $2x + N$ en vez de l' .

Así obtendremos

$$S = \frac{G \phi}{L} \frac{4x^2 + 2xN}{4x + N} \quad (7)$$

Tal es el esfuerzo tangencial en el elemento dF .

Para obtener el momento de esta fuerza con relación al núcleo neutro, multiplicaremos la expresión anterior por x .

Consideremos ahora el prisma hueco a que pertenece el elemento dF . Asignamos a las láminas el espesor dx y teniendo en cuenta que el perímetro del rectángulo, base de ese prisma hueco, es $8x + 2N$, obtendremos para el momento de torsión de ese prisma la expresión

$$dM = \frac{G \phi}{L} \frac{4x^2 + 2xN}{4x + N} 2x (4x + N) dx$$

o sea

$$dM = \frac{G \phi}{L} (8x^3 + 4Nx^2) dx$$

El momento de torsión para el prisma sólido total nos lo dará la integral.

$$M = \frac{G \phi}{L} \int_0^{\frac{1}{2}} (8x^3 + 4Nx^2) dx$$

$$M = \frac{G \phi}{L} \left[2x^4 + 4\beta N x^3 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$M = \frac{G \phi}{L} \left(\frac{l^4}{8} + \frac{Nl^3}{6} \right) \quad (8)$$

Tal es la expresión del momento de torsión para un prisma de base rectangular. Si en la fórmula (7) hacemos $N=0$, obtenemos la expresión

$$S = \frac{G \phi}{L} \cdot x \quad (9)$$

que nos da el valor del esfuerzo elemental en un prisma de base cuadrada en que el núcleo neutro se ha reducido a un punto.

Haciendo otra vez $N=0$ en la fórmula (8), obtenemos el momento de torsión del prisma de base cuadrada.

$$M = \frac{G \phi}{L} \frac{l^4}{8} \quad (10)$$

Finalmente si en la fórmula (4) hacemos $l=l'$, el valor de d es nulo, lo que significa que en un prisma de base cuadrada no hay desplazamientos reales de las fibras longitudinales, es decir, que las secciones normales al eje del prisma se mantienen planas después de la deformación.