Fco. Javier Domínguez S.

Curso de Hidráulica General

(*Continuación*)

La **Tabla N.º 28** y el gráfico de la *figura 134* que va a continuación dan estas alturas relativas de resalto en lechos rectangulares.

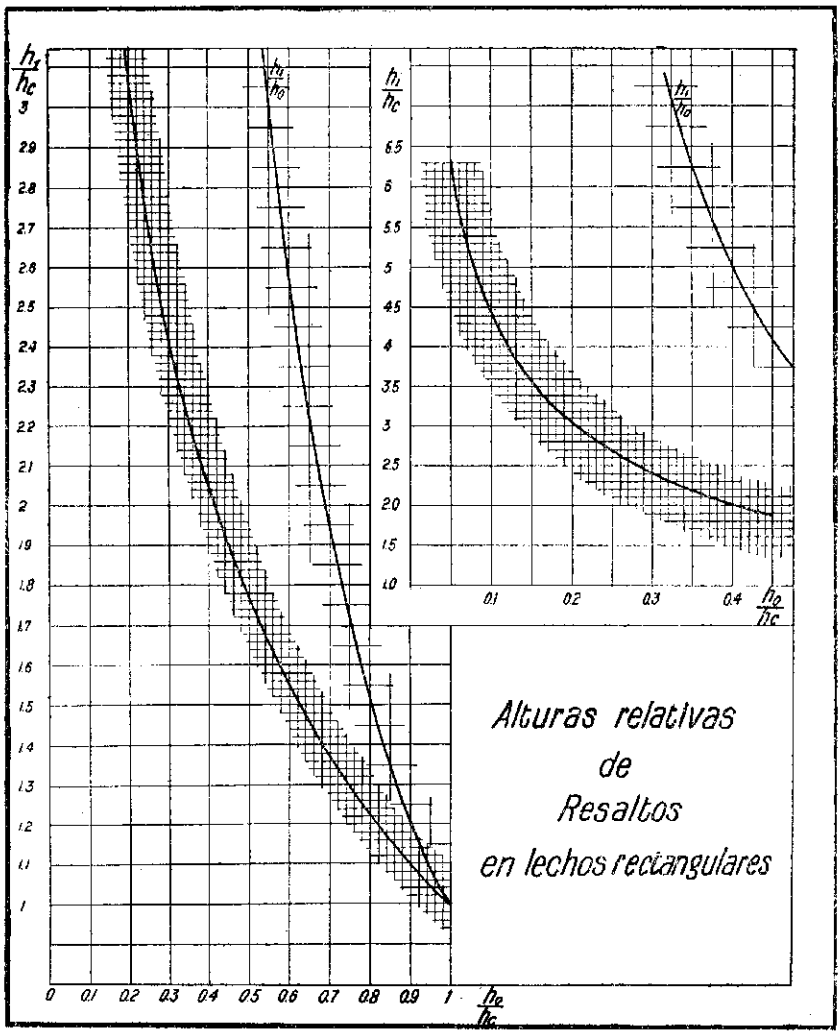

Fig. 134

El cálculo de resaltos en lechos de forma cualquiera, se hace por tanteos, introduciendo en la ecuación (8, los valores del miembro conocido y calculando los elementos del otro. En E.E. U.U. se ha preocupado J. C. Stevens (1) de encontrar relaciones que permitan el cálculo de las alturas de resalto en lechos triangulares, parabólicos, circulares y trapeciales. En esta última forma de lechos, que son utilizados en la prática, es interesante el gráfico trazado por G. H. Hickox (2) que copiamos a continuación. Adoptando, como lo hace Stevens, los siguientes parámetros:

$$J = \frac{h_1}{h_o} \qquad r = \frac{U_o^2}{2gh_o} \qquad t = \frac{b}{h_o\, tg\alpha}$$

en que h_1 y h_o tienen el significado dado anteriormente, U_o la velocidad del torrente, b la base del lecho trapecial y $tg\alpha$ la semisuma de las inclinaciones de los lados con la vertical, que, como se ha hecho notar en otras ocasiones, pueden ser distintas entre sí, llega Hickox a la expresión:

$$J^4 + \frac{5t+2}{2} J^3 + \frac{(3t+2)\,(t+1)}{2} J^2 + \left[\frac{t^2}{2} + (t-6r)\,(t+1)\right] J - 6r\,(t+1)^2 = 0 \qquad (18$$

ecuación numérica que es la que aparece en el gráfico de la *figura 135*, cuyo uso se ve más adelante en un ejemplo.

Para el cálculo de resaltos en lechos circulares se ha calculado la **Tabla N.° 29,** que aparece dibujada en gráfico de la *figura 136*. Para cada valor de $\frac{h}{r}$, es decir, de la *altura relativa al radio* se han calculado y dibujado los de $\frac{r^2}{\Omega}$ y $\frac{\eta\,\Omega}{r^3}$, ambas son números: la primera fracción es la inversa de la sección multiplicada por el cuadrado del radio, y la segunda, el momento estático $\eta\,\Omega$, dividido por la tercera potencia del radio. Multiplicando la primera por $\frac{Q^2}{g} r^2$ y la segunda por r^3, sumándolas ambas se obtiene el valor de la función A, para una altura dada.

Considerando otros lechos abovedados se han trazado también los gráficos de las *figuras 137* y *138*, que permiten un cálculo de resaltos en ovoides normales, cuya punta está en la parte superior (*fig. 137*) o en la inferior (*fig. 138*). En los ejemplos que van al final de este párrafo se evidencia el uso de las tablas y gráficos mencionados. En las *figuras 137* y *138* aparecen en función de h, además de los elementos de resalto, el ancho superficial l, la sección Ω y el radio hidráulico, $\boldsymbol{R}$.

El cálculo de la ubicación del resalto en una corriente, corresponde al estudio del movimiento gradualmente variado.

La teoría expuesta anteriormente es debida a Bélanger (1828) y ha sido seguida en Bélgica y Francia por todos los hidraulicistas como Boudin, Boussinesq, etc.; en

(1) The hydraulic jump in standard conduits—Civil Engineering—octubre de 1933.

(2) Graphical solution for hydraulic jump—Civil Engineering—mayo de 1934.

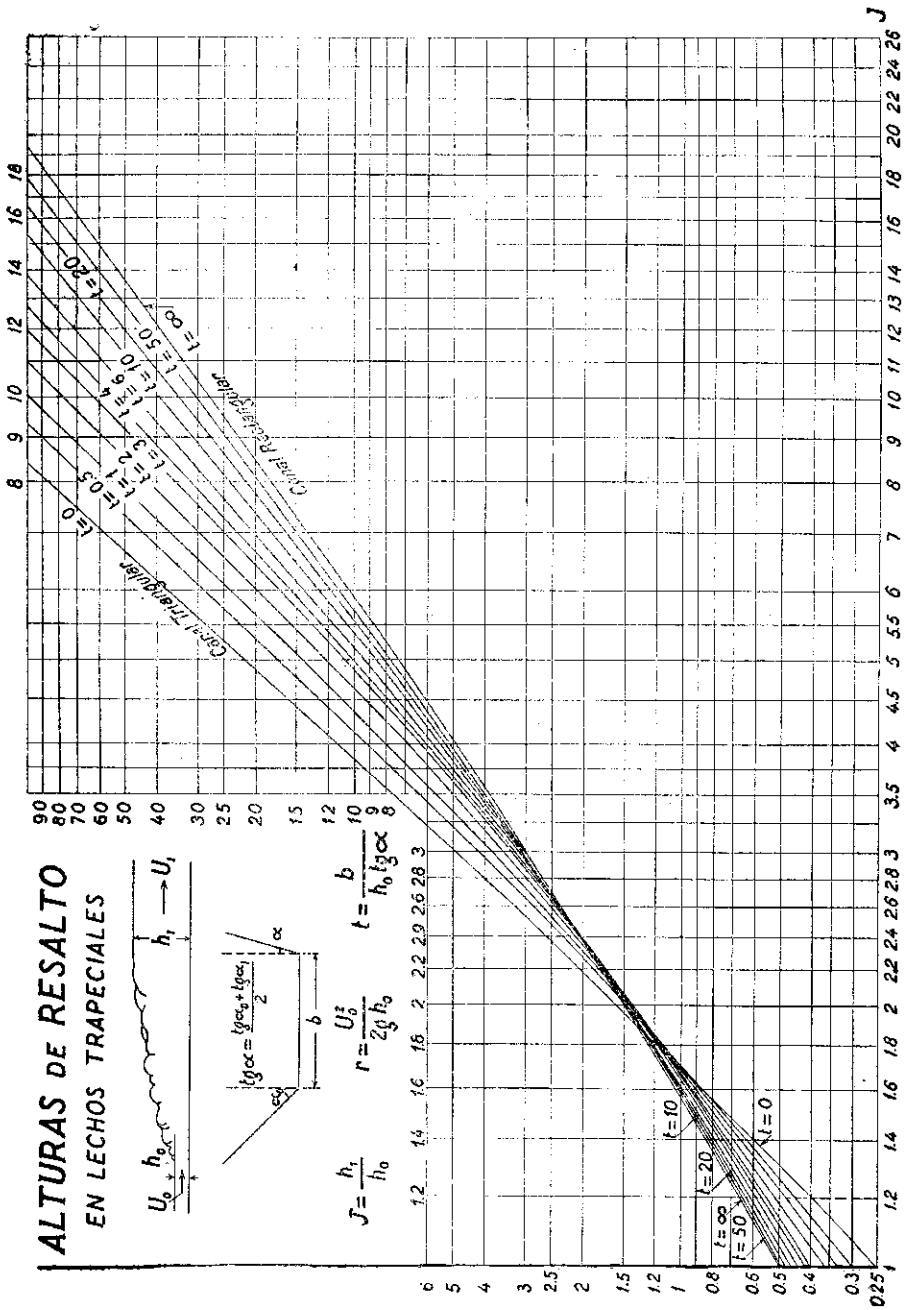
ALTURAS DE RESALTO
EN LECHOS TRAPECIALES
U_0 h_0
$h_1 \longrightarrow U_1$
$tg\alpha = \frac{tg\alpha_0 + tg\alpha_1}{2}$
b
α
α_0
α_1
$J = \frac{h_1}{h_0}$
$r = \frac{U_0^2}{2g\,h_0}$
$t = \frac{b}{h_0\,tg\alpha}$
Canal Triangular
Canal Rectangular
t = 0
t = 0.5
t = 1
t = 2
t = 3
t = 4
t = 6
t = 10
t = 50
t = ∞
t = 20
J

Fig. 135

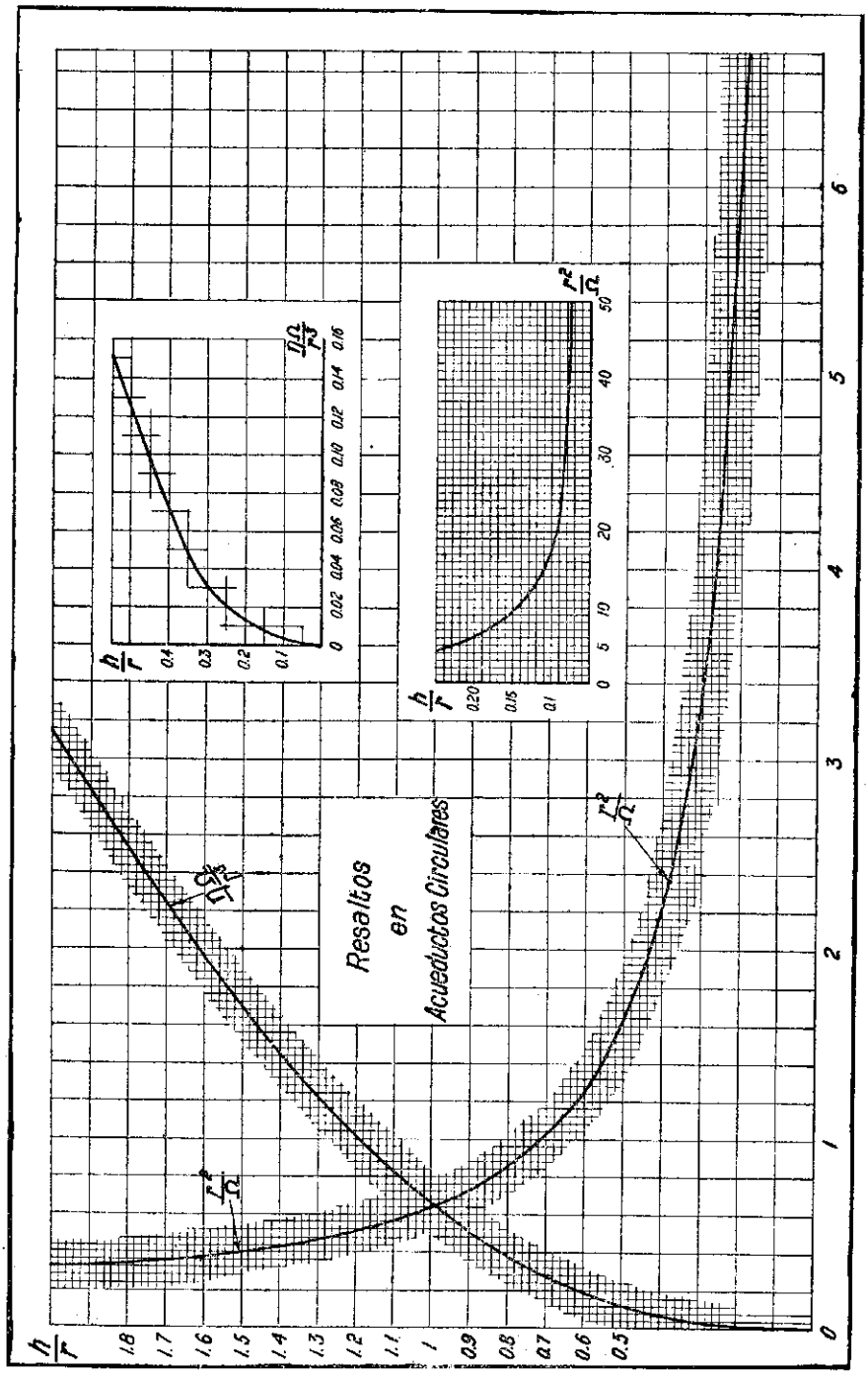

Fig. 136

Inglaterra por Unwin; en Alemania, en forma más general por Ritter y en forma análoga a la nuestra ha sido estudiada por Koch (1908-1926). Han experimentado resaltos Bi-

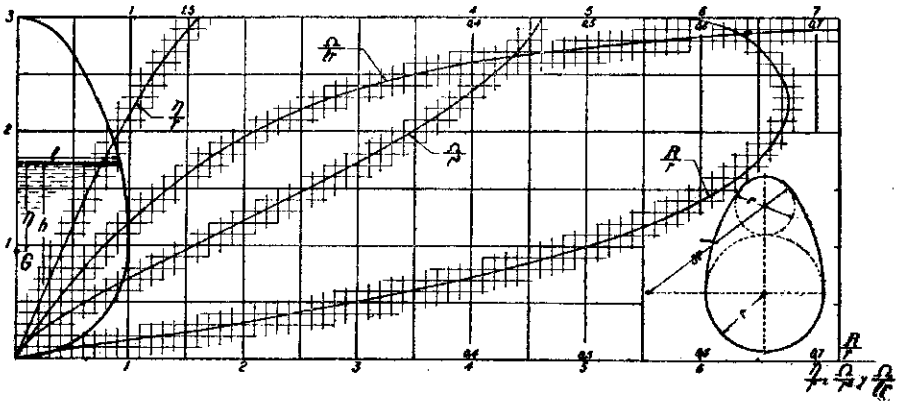

Fig. 137

done (1818), Baumgarten (1885), y Bazin (1868) y más modernamente Ferriday (1894), Gibson (1914), Lindquist (1927), Groke (1927) (1) y J. K. Safranez (1927). En Chile por

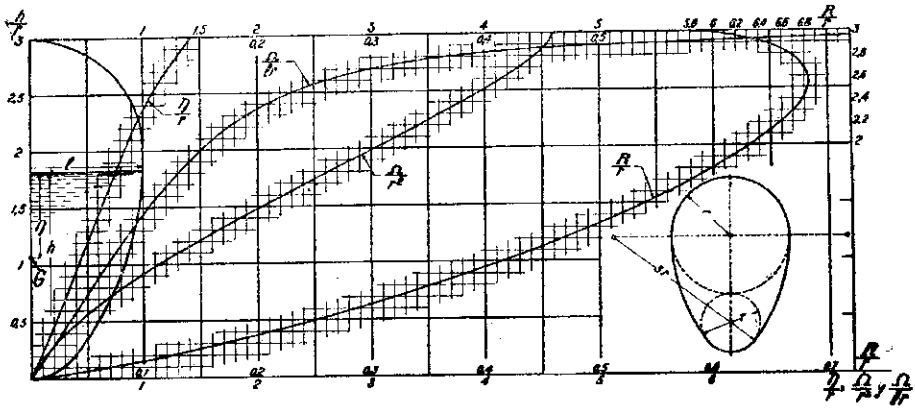

Fig. 138

A. Ovalle y A. Domínguez (2) en 1933-1934 y por A. Cabero y C. Amenábar (1934) (3). Los primeros hasta Bazin experimentaron resaltos cuya razón de alturas $\frac{h_1}{h_o}$ llega ape-

(1) Lindquist en la Universidad de Estokolmo, 30 experiencias; Groke, en Karlsruhe, 13 experiencias; y Safranez en la Universidad Técnica de Berlín, 26 experiencias.

(2) Se han medido 76 resaltos.—Tesis Universidad Católica—1934.

(3) Memoria de vacaciones. Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile. 6 medidas.

nas a *3*; es decir $\frac{h_o}{h_c} = 0{,}57$ y $\frac{h_1}{h_c} = 1{,}80$. Gibson llegó en cambio a $\frac{h_1}{h_o} = 12{,}5$ o sea $\frac{h_o}{h_c} = 0{,}23$ y $\frac{h_1}{h_c} = 2{,}82$. Todas las experiencias, interpretadas correctamente (1), demuestran la validez de la teoria de Bélanger. Las experiencias chilenas llegaron hasta razones $\frac{h_1}{h_o} = 13{,}38$ y las de K. Safranez hasta $\frac{h_1}{h_o} = 25{,}62$, que es el mayor resalto relativo experimentado hasta la fecha.

Especial interés tienen las experiencias de Groke (1927, en Karlsruhe) hechas para ver la validez de la igualdad de la «función de los momenta» o función ***A***, en el resalto. Demuestran la perfecta concordancia de la experimentación con la teoría, siempre que *se prescinda de los coeficientes* α que afectan a las alturas de velocidad, tal como lo hemos hecho.

En las experiencias de los Sres. A. Ovalle y A. Domínguez, hechas en lechos rectangulares, la aplicación de la fórmula (*14*, dió en los *63* resaltos propiamente tales un error máximo de *5%*, y un error probable en su aplicación de sólo *2,01%*. También se determinó la longitud del resalto, de que se habla un poco más adelante. En las de los Sres. Cabero y Amenábar, en que hay *4* resaltos propiamente tales, el mayor error fué de *1%* y en término medio solamente *0,7%*.

Cuando $\frac{h_o}{h_c}$ es mayor de *0,73* o sea $\frac{h_1}{h_c}$ menor que *1,31*, por lo tanto $\frac{h_1}{h_o}$ es menor de *1,8*, el resalto no aparece como un brusco y único ensanche de la corriente, sino que toma la forma de una serie de ondulaciones superficiales fijas (2). Se presenta, como se ha solido decir, como una serie de ondas que propagándose desde aguas abajo, han quedado fijas en un punto (*fig. 139*), sujetas por la corriente del torrente,

Fig. 139

más veloz que ellas, que las impide remontar. Por esto Gibson llamó al resalto «onda fija» (standing wave). Cuando las profundidades relativas del resalto difieren apenas *5%* de la crítica, el eje hidráulico del resalto es una simple contrapendiente. El límite que separa los resaltos de ondas de los resaltos propiamente tales, que ha

---

(1) Se han hecho muchas interpretaciones de las experiencias antiguas, hasta las de Ferriday, en que la razón $\frac{h_1}{h_o}$ es menor que *3*, y en las cuales erróneamente se confunde el resalto con el movimiento variado que le sigue, apreciando mal el valor de h_1.

(2) Tesis ya nombrada «Estudio experimental sobre resaltos».—A. Ovalle y A. Domínguez.—Universidad Católica 1934.

sido determinado directamente en las experiencias citadas, difiere algo del que había señalado Bazin indirectamente, pues este autor dice que son resaltos de ondas los inferiores al límite $\frac{h_1}{h_o} = 2{,}37, \left(\frac{h_o}{h_c} = 0{,}63, \frac{h_1}{h_c} = 1{,}49\right)$. En realidad las experiencias chilenas de A. Ovalle y A. Domínguez revelan, que bajo el límite $\frac{h_1}{h_o} = 1{,}8$ *son solamente posibles los resaltos en forma de ondulaciones*, pero que éstos pueden presentarse en razones $\frac{h_1}{h_o}$ mayores, como que experimentalmente se midieron hasta $\frac{h_1}{h_o} = 3{,}80, \left(\frac{h_o}{h_c} = 0{,}423 \frac{h_1}{h_c} = 1{,}61\right)$ (1). Absurdo sería pretender hacer extensiva a estos resaltos la teoría expuesta, pues la enorme longitud del fenómeno requiere la introducción de los frotamientos cuya importancia es quizás mayor que la diferencia de presiones de las caras terminales. Boussinesq ha explicado la forma de la serie de ondulaciones, y aun la altura de las primeras ondulaciones (2). Además, como no se trata de corrientes de filetes paralelos, es necesario hacer intervenir la curvatura real de los filetes en la teoría de los resaltos.

En todo caso acompaña al resalto una agitación violenta en forma de ondas que hace un tanto difícil la medida del nivel de aguas abajo. Cuando existe el salto brusco, se sitúa sobre el torrente un torbellino de agua de eje horizontal, que no participa del escurrimiento (rodillo o cilindro superficial líquido, como dice Rehbock) que absorbe en movimientos irregulares la energía que se disipa. La *figura 132* es un resalto medido directamente, de $\frac{h_1}{h_o} = 3{,}97$. Si se observa cuidadosamente la sección

---

(1) Este resalto ha sido reproducido también en forma de ondas por los Sres. A. Cabero y C. Amenábar, y en ambas formas por los Sres. Ovalle y Domínguez.

(2) «Essai sur la théorie des eaux courrantes», pág. 211 y siguientes. Boussinesq llega a determinar la altura de las ondas sobre el de la profundidad inicial h_o que en forma simplificada sería: $\varepsilon = \frac{2\,U_o^2}{2g} - h_o$. En función de la profundidad crítica, sin entrar en más detalles, se obtendría para las alturas relativas del torrente que se indican:

$\frac{h_o}{h_c} =$	1	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,73
$\frac{\varepsilon}{h_c} =$	0	0,154	0,31	0,54	0,76	1,05	1,15

Es fácil comprobar que con estos valores las primeras ondas quedan por encima del que corresponde a h_1 de la fórmula de Bélanger, hecho que confirma la experiencia en líneas generales.

La forma de las ondulaciones es la determinada por Boussinesq para la onda solitaria, que al propagarse en poca hondura se descompone en una serie de ondulaciones. El estudio de Boussinesq ha sido reproducido por Boulanger en su Hydraulique Génerale y por Flamant. Boussinesq llamó «torrentes de pendiente moderada» a los torrentes que admiten resaltos de ondas

del río en que ya toda la sección participa del escurrimiento, se puede obtener, a pesar de la agitación, la medida de h_1 (1).

Si los resaltos son de ondas presentan la forma de la *figura 139*, tendiendo el nivel medio de las intumescencias al que corresponde al de la corriente final. Como estos resaltos de ondas se producen con profundidades anteriores y posteriores muy cercanas a la crítica, son por eso frecuentes en torrentes que escurren cercanos al escurrimiento crítico, pues en ellos la más mínima alteración del fondo provoca el paso de torrente a río. En vertederos de pared gruesa, cuyo espesor de umbral es superior a *15* veces la profundidad crítica, el escurrimiento sobre el umbral (que más que vertedero es un canal sin pendiente), tiende a ser crítico desde la entrada, y se verifica próximo a la crisis en toda su extensión: por eso son frecuentes aquí los resaltos de ondas, como se dijo al tratar de los vertederos.

En las experiencias chilenas citadas, se ha determinado la «*longitud del rasalto*», llamando así al largo de corriente ocupado por el torbellino superficial o «*rodillo*» de Rehbock. Es en realidad la determinación de la longitud (*fig 132*) de gran agitación, en que el resalto se verifica. En los resaltos de ondas no puede hablarse de una longitud de la agitación, pues la perturbación que el resalto introduce en la superficie libre del río es indefinida. Para resaltos en que $\frac{h_1}{h_o}$ es mayor de *1,80* se puede decir que la longitud del resalto, en lecho rectangular, obedece a la expresión experimental:

$$\frac{d}{h_c} = 1{,}5\left(\frac{h_1}{h_o} - 0{,}8\right) \qquad (19$$

en que d es la longitud del resalto en metros, h_c la profundidad crítica, h_1 y h_o, como anteriormente, las profundidades del río y del torrente que forman el resalto.

---

(1) Como se ha dicho en el texto, en los resaltos de ondas es necesario hacer intervenir la curvatura de los filetes para encontrar las alturas de resalto. El profesor Dekeyser (Mouvement permanent dans les canaux—1923—Universidad de Bruselas), partiendo de la hipótesis que el movimiento se produce bajo un régimen de potencial de velocidades, al tratar del resalto en corrientes de filetes curvos, llega a la ecuación de la función $\boldsymbol{A}$ de resaltos, modificada como sigue:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{Q^2\,\Omega}{g\,S^2} + \eta\,\Omega$$

en que Ω es la sección plana y S la *sección transversal*, o sea el corte normal a las trayectorias reales. Es evidente que siempre S es mayor que Ω, y por lo tanto, para una altura dada h la función $\boldsymbol{A}_1$ es menor que la $\boldsymbol{A}$ de la ecuación (9. Si además agregamos los frotamientos, que influyen como se ha dicho, se llega a la conclusión que en un resalto de ondas en que se puede considerar curvatura de filetes en la sección del torrente y sección plana la del río, la altura h_1 de éste *debe ser menor* que la que da la teoría de Bélanger. Este hecho ha sido confirmado por las experiencias chilenas que en *15* medidas dieron todos los ríos menores de la que corresponden a dicha teoría. La dificultad de la medida impidió deducir conclusiones más precisas.

He aquí los valores de d/h_c entre los límites de validez (1).

$\frac{h_o}{h_c} =$	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,73
$\frac{h_1}{h_c} =$	2,695	2,42	2,21	2,05	1,892	1,75	1,655	1,55	1,455	1,37	1,31
$\frac{d}{h_c} =$	1,48	1,09	8.3	6,5	5,1	4,05	3,3	2,7	2,16	1,59	1,50

Algunos autores, como Mouret y otros, dicen que la agitación turbulenta que provoca el resalto es tan intensa, que es casi imposible la medida del río final. La experimentación nos revela, en cambio, que en lecho rectangular es fácil dicha medida, sin necesidad de acudir a su determinación con piezómetro, como lo hizo Gibson. Esta determinación con piezómetro que elimina las dificultades, tiene el defecto de suponer la ley hidrostática en la sección, que debería probarse por otro método.

Ejemplo N.° 1.—En un canal de lecho rectangular de *2,5* m. de ancho, escurre un gasto de *3* m³:s. ¿A qué altura es capaz de saltar el torrente anterior al resalto si tiene una profundidad de *0,3* m.?

La profundidad crítica, según la tabla correspondiente (*pág. 68*) es *0,528*, con lo que se tiene $h_o/h_c = 0,3/0,528 = 0,568$. Según el gráfico de la *figura 134* y la **Tabla N.° 28** esta profundidad relativa del torrente corresponde una de río de $h_1/h_c = 1,62$ o sea, $h_1 = 1,62 \times 0,528 = 0,855$ m. Es decir que es capaz de saltar a una altura de *0,855* m. La longitud relativa del resalto es, según el cuadro anterior: $d/h_c = 3,1$ y por lo tanto el espacio de la agitación turbulenta es de $d = 3,1 \times 0,528 = 1,63$ m. (2)

---

(1) El profesor A. Ludin, de Berlín (1929), valiéndose de las experiencias de Safranez, da para la longitud de resalto la expresión que se puede escribir:

$$\frac{d}{h_c} = 4,5 \frac{h_1}{h_c} \qquad (20$$

cuyos resultados son diversos de los que han dado las experiencias arriba citadas.

Las experiencias de Safranez se hacían observando el punto en que los filetes coloreados iban hacia aguas abajo al final del torbellino o «rodillo» que cubre el resalto. Hemos tratado de comprobar esta fórmula, pero experiencias repetidas con esa intención nos han acercado mucho más a la fórmula (*19* que a la de Ludin. Especialmente, esta expresión exagera la longitud de los resaltos relativamente pequeños $\left(\frac{h_1}{h_o}\right.$ menor de *8*$\left.\right)$, que son los de la práctica. Quizás, a la inversa, en resaltos en que $\frac{h_1}{h_o}$ es mayor de *10* $\left(\text{es decir, } \frac{h_1}{h_c} > 2,62 \text{ y } \frac{h_o}{h_c} < 0,26\right)$, la expresión (*20*, sea más conforme con la experiencia que la (*19*. Estos resaltos tan grandes son muy poco frecuentes en la práctica del ingeniero. Por último, el canal de experimentación de Safranez era sólo de *50* cm. y el mayor gasto de sus experiencias fué de *38* lts:s. Las experiencias chilenas fueron hechas en un canal de *1* m. de ancho y el gasto siempre fué superior a *70* lts:s. llegando hasta *180* lts.:s.

(2) Según la fórmula de Ludin, sería $\frac{d}{h_c} = 4,5 \times 1,62 = 7,3$, o sea, $d = 3,86$ m.

El caso inverso en lecho rectangular, o sea, conocido el río, determinar el torrente anterior que puede darlo es análogo.

EJEMPLO N.° 2.—En un lecho trapecial de 2 m. de base con taludes de uno de base por uno de alto, escurre un gasto de 2 m³: s. con una profundidad de 1 m. ¿Qué resalto puede generarse con esta corriente?

La profundidad crítica se calcula según la **Tabla N.° 1** por la expresión:

$$\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h^2 a}$$

que da:

$$\frac{Q}{b} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \frac{1}{h_b^2} = 4{,}50$$

$$\frac{Q}{tg\alpha} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{1}{h_\alpha^2} = 1{,}10$$

$$\frac{1}{h_c^2} = 5{,}60$$

o sea: $h_c = 0{,}42$ m.

Como la profundidad de la corriente es mayor que la crítica, es un río y por lo tanto es la profundidad posterior al resalto. Hay que buscar la del torrente que lo precede.

Con los datos se calcula la función $\boldsymbol{A}$, notando que el centro de gravedad dista de la superficie libre:

$$\eta = \frac{h}{3} \cdot \frac{l + 2b}{l + b}$$

expresión en que l es el ancho superficial y b el de la base. Se tiene entonces:

$$\boldsymbol{A} = \frac{Q^2}{g\Omega} + \eta\Omega = \frac{4}{9{,}8 \times 3} + 3 \times \frac{1}{3}\,\frac{4+4}{4+2} = 1{,}47 \text{ m}^3.$$

Tanteando, se encuentra que la altura de torrente $h = 0{,}133$ da el mismo valor $\boldsymbol{A} = 1{,}47$ m³ que tiene el río de 1 m.

En el cuadro siguiente aparecen los tanteos hechos, de donde se obtuvo el torrente del resalto por interpolación:

h	Ω	η	$\eta\Omega$	$\frac{Q^2}{g}$	$\frac{Q^2}{g\Omega}$	A
0,20	0,440	0,0966	0,043	0,408	0,93	0,973
0,15	0,323	0.0732	0,024	»	1,26	1,284
0,13	0,270	0,0610	0,0165	»	1,51	1,527

EJEMPLO N.° 3.—El gráfico de la *fig. 135*, que no puede ser usado para el cálculo del torrente que antecede a un resalto, pues supone el conocimiento de la razón $r=\frac{U_o^2}{2gh_o}$, es, en cambio, útil para el cálculo rápido del río que sigue al resalto. En el ejemplo siguiente se evidencia el uso del gráfico citado.

¿Qué altura tiene el río del resalto que se verifica en un lecho trapecial de *3* m. de base, con un lado en talud $^1/_1$ y el otro vertical, si el torrente tiene una altura $h_o=0,3$ y si escurren *4* m³:s?

Con los datos se tiene: $\Omega_o=\frac{3+3.3}{2}0,3=0,945$ m². La velocidad del torrente vale, entonces, $U_o=\frac{4}{0,945}=4,24$; la altura de velocidad del torrente es: $\frac{U_o^2}{2g}=0,916$.

Se entra al gráfico de la *fig. 135* con las razones $r=\frac{U_o^2}{2gh_o}$ y $t=\frac{b}{h_o tg\alpha}$, y se lee el valor de $J=\frac{h_1}{h_o}$, que corresponde a ellas. En nuestro caso tenemos: $r=\frac{0,916}{0,30}=$ $=3,06$; $t=\frac{3}{0,3\times 0,5}=20$ (es de notar que $tg\alpha$ es la semisuma de la inclinación de ambos lados con la vertical, en este caso, $tg\alpha=\frac{1+0}{2}=0,5$).

A estos valores corresponde $J=3$, de donde $h_1=3\times 0,3=0,90$ m.

EJEMPLO N.° 4.—En un acueducto circular de 6 m. de diámetro escurre un gasto de 6 m³:s., con una profundidad de *0,5* m. ¿A qué río puede saltar este torrente?

Para comprobar que la altura de *0,5* m. de la corriente en el acueducto es, efectivamente, un torrente, calculamos la profundidad crítica correspondiente al gasto de 6 m³:s. Lo hacemos tanteando por medio de la **Tabla N.° 2** y gráfico adjunto (pág. 69). En el cuadro siguiente van los tanteos que se hacen:

h	$\frac{h}{r}$	$\frac{\Omega}{r^2}$	Ω	$\frac{\Omega}{lr}$	$\frac{\Omega}{l}$	$\sqrt{g\frac{\Omega}{l}}$	$\Omega\sqrt{g\frac{\Omega}{l}}$
1,00	0,33	0,34	3,06	0,23	0,69	2,60	7,95
0,90	0,30	0,296	2,66	0,207	0,621	2,466	6,56
0,87	0,29	0,275	2,475	0,200	0,600	2,422	6,00

En estos tanteos se ha tratado de comprobar qué altura verifica el gasto en escurrimiento crítico, esa altura es $h=0,87$ m. Como $0,87$ m. es mayor que $0,50$ la corriente del acueducto es un torrente.

Para ver a qué río es capaz de llegar en resalto, calculamos la función $\boldsymbol{A}$ del torrente, por medio de la **Tabla N.° 29** y gráfico de la *fig. 136*. Para $h=0,5$; $h/r = \frac{0,5}{3} = 0,167$; $\frac{r^2}{\Omega}=8,1$; $\frac{l}{\Omega}=0,9$; $Q^2/g=3,67$; $\frac{\eta\Omega}{r^3}=0,010$; $\eta\Omega=0,27$.

$$\boldsymbol{A}=3,67\times 0,9+0,27=3,57 \text{ m}^3.$$

En el cuadro siguiente van los tanteos del río que da este valor de $\boldsymbol{A}$.

h	$\frac{h}{r}$	$\frac{r^2}{\Omega}$	$\frac{l}{\Omega}$	$\frac{Q^2}{g\Omega}$	$\frac{\eta\Omega}{r^3}$	$\eta\Omega$	$\boldsymbol{A}$
1,25	0,417	2,125	0,236	0,867	0,081	2,185	3,052
1,35	0,450	1,895	0,211	0,775	0,100	2,700	3,475
1,40	0,467	1,82	0,202	0,742	0,108	2,920	3,662

Interpolando se ve que la altura de río que da $\boldsymbol{A}=3,57$ es $h=1,375$ m. Por lo tanto, el resalto se produce de $0,50$ a $1,375$ m.

EJEMPLO N.° 5.—¿Cuál es la otra altura del resalto que se verifica en el ovoide normal cuya punta está arriba, y cuyo radio (definido en la *fig. 137*) es de $r=2$ m, si se ha medido la altura de 1 m. y el gasto que escurre es de 6 m³:s?

Con los datos se obtiene en la *fig. 137*, $h=1$ m. $\frac{h}{2}=0,5$; $\frac{\Omega}{r^2}=0,62$; $\Omega=2,48$ m²; $\frac{\eta}{r}=0,21$; $\eta=0,42$ m; como $\frac{Q^2}{g}=\frac{36}{9,8}=3,67$, se tiene:

$$\boldsymbol{A}=\frac{3,67}{2,48}+0,42\times 2,48=2,52 \text{ m}^3$$

Para tantear con otra altura, acertadamente, es necesario saber si $h=1$ m. corresponde al río o al torrente del resalto. No es necesario calcular h_c; basta verificar el gasto que correspondería en crisis a $h_c=1$ m. En el mismo gráfico se obtiene para $\frac{h}{r}=0,5$ el valor $\frac{\Omega}{lr}=0,46$, o sea, $\frac{\Omega}{l}=0,92$ y por lo tanto:

$$Q_1=\Omega\sqrt{g\frac{\Omega}{l}}=2,48\sqrt{g\times 0,92}=7,44 \text{ m}^3\text{:s}$$

como este gasto es mayor que el de nuestro ejemplo, la profundidad corresponde a un río.

Tanteando, entonces, con alturas menores, se obtiene para $h = 0{,}88$ m. $\frac{h}{r} = 0{,}44$; $\frac{\Omega}{r^2} = 0{,}52$; $\frac{\eta}{r} = 0{,}18$; $\Omega = 2{,}08$ m²; $\eta = 0{,}36$ m., y, finalmente:

$$A = \frac{3{,}67}{2{,}08} + 0{,}36 \times 2{,}08 = 2{,}51$$

No da el gráfico mayor precisión para los cálculos y cualquier otro tanteo, con altura que se diferencie de $h = 0{,}88$ m. en *1* cm. da peor resultado para A, de modo que, el torrente, puede contestarse, tendrá *0,88* m.

Para terminar con los resaltos y como aplicación del uso de su teoría, se va a calcular la *profundidad límite del río* que no ahoga un *orificio de fondo*, como el que deja una compuerta. En otras palabras, se trata de determinar el *rechazo del resalto* por un *orificio de compuerta*, es decir, que una mayor altura traería el río a cubrir el orificio de la compuerta. Este orificio de contracción suprimida en los lados, e inferiormente, es seguido por una vena, cuyo espesor es *ma* (*figura 140*) si *m* es el coeficiente de gasto (1) del orificio y *a* su altura. Supondremos únicamente lechos rectangulares de ancho *l* y alturas *ma* menores que la crítica. El gasto del orificio es:

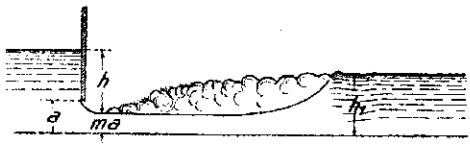

Fig. 140

$$Q = mal\sqrt{2gh}$$

o por unidad de ancho:

$$\frac{Q}{l} = q = ma\sqrt{2gh}$$

de aquí se puede escribir:

$$h^3_c = \frac{q^2}{g} = 2\,m^2a^2h$$

La altura del río h_1 hasta la cual es capaz de saltar el torrente de altura *ma*, es precisamente el río límite cuya altura si es superada, el resalto cubre el pie de la compuerta. En cambio, todos los ríos de altura menor que h_1 dan resalto alejado de la compuerta.

Introduciendo en la ecuación (*14*, en vez de h_o su valor *ma*, se tiene:

$$h^3_c = \frac{ma + h_1}{2}\,ma\,h_1$$

Igualando esta expresión con la anterior, se obtiene h_1 en función de *m*, *a* y *h*

(1) Suponemos que el coeficiente de contracción es igual al de gasto, como prácticamente sucede (véase Cap. V—§ 32—pág. 107)

$$2\,m^2a^2h = \frac{ma + h_1}{2}\,ma\,h_1$$

De aquí, finalmente, resulta la ecuación de segundo grado:

$$h_1^2 + ma\,h_1 - 4\,ma\,h = 0$$

Es sólo útil la raíz positiva que da ese río límite:

$$h_1 = -\frac{ma}{2} + \sqrt{\frac{m^2a^2}{4} + 4\,ma\,h}$$

Que se puede poner:

$$h_1 = a\left(\sqrt{4\,m\frac{h}{a} + \frac{m^2}{4}} - \frac{m}{2}\right) \qquad (21$$

o si se quiere:

$$\frac{h_1}{a} = \sqrt{4\,m\frac{h}{a} + \frac{m^2}{4}} - \frac{m}{2} \qquad (21a$$

El coeficiente m varía en función de la razón $\frac{a}{h}$ según las experiencias de Boileau vistas en el capítulo V entre *0,67* y *0,60* cuando $\frac{a}{h}$ varía de *0,05* a *0,02*, permaneciendo constante e igual a *0,6* en compuertas cuyo $\frac{a}{h}$ es mayor que *0,20*. En este último caso, que es el más común se tiene:

$$h_1 = a\left(\sqrt{2{,}4\frac{h}{a} + 0{,}09} - 0{,}3\right) \qquad (22$$

o si se quiere:

$$\frac{h_1}{a} = \sqrt{2{,}4\frac{h}{a} + 0{,}09} - 0{,}3 \qquad (22a$$

He aquí los valores de $\frac{h_1}{a}$ calculados por medio de las expresiones (*21a* y (*22a* poniendo los coeficientes m dados por Boileau (*cap. V, pag. 107*).

$\frac{a}{h}$	*0,05*	*0,075*	*0,10*	*0,15*	*0,20*	*0,3*	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,8*	*1*
$\frac{h_1}{a}$	*6,98*	*5,54*	*4,71*	*3,76*	*3,17*	*2,54*	*2,17*	*1,91*	*1,75*	*1,48*	*1,28*

Gibson, que experimentó los resaltos produciendo el torrente por medio de un orificio de compuerta, da para h_l, *límite*, que nos ocupa, la expresión empírica, escrita en medidas métricas:

$$h_l = 1{,}5\sqrt{ah} \qquad (23$$

A continuación va una comparación de los resultados de esta fórmula con las expresiones (*21* y (*22* dentro los límites de experimentación de Gibson.

a	*h*	h_l (*mts.*)	
mts.	*mts.*	*fórmulas* (*21* y (*22*	*fórmula de Gibson* (*23*
0,05	*0,30*	*0,177*	*0,186*
«	*0,50*	*0,235*	*0,237*
«	*1,00*	*0,350*	*0,336*
0,075	*0,30*	*0,190*	*0,225*
«	*0,50*	*0,282*	*0,290*
«	*1,00*	*0,415*	*0,411*
0,100	*0,30*	*0,242*	*0,260*
«	*0,50*	*0,317*	*0,336*
«	*1,00*	*0,471*	*0,469*

Al tratar de los vertederos se han dado los valores análogos de las profundidades del torrente que tiende a producirse al pie de una barrera o de una grada de bajada y del río hasta el cual ese torrente puede saltar en resalto. Esta profundidad de río es lo que hemos llamado *rechazo del resalto* por la barrera o la grada.

64. Ensanches paulatinos.—Como en contornos cerrados, en canales cuyos lados se abren con cierto ángulo o cuyo fondo baja con gran pendiente en corto trecho, sin que la superficie libre adquiera una gran pendiente, se producen pérdidas de carga de frotamientos distintas de las que se observan en corrientes uniformes y gradualmente variadas y pérdidas debidas al ensanche, distintas de las de ensanche brusco de igual razón $\frac{\Omega_1}{\Omega_o}$. Analíticamente, no se ha establecido el valor de éstas pérdidas. Experimentalmente, aquí, en Chile, se ha encontrado (1) que el conjunto de estas pérdidas, computadas por medio de un coeficiente que multiplica a la fórmula de Borda, *análogo al número de Gibson* de los contornos cerrados, tiene una variación general igual a él y valores también muy semejantes a los que obtuvo ese experimentador en canalizaciones cerradas, de altura constante, cuyas paredes se abren (Capítulo V—§ 35—fig. 76).

A continuación van los valores del coeficiente ξ correspondientes a los ángulos, en las dos relaciones entre ancho inicial y final experimentados. Con él se calcula la pérdida de carga por medio de la ecuación:

(1) Ensanches bruscos o paulatinos de canales. H. Matthaei y S. Lewin (1932).

$$\Delta = \xi \frac{(U_o - U_1)^2}{2g} = \xi \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_o} - 1 \right)^2 \frac{U_1^2}{2g} \qquad (24$$

Es de notar que el peralte del eje hidráulico es pequeño en el ensanche paulatino de canales, siempre que la sección inicial no sea cercana a la crisis, por eso se puede tomar la razón de anchos como la razón de secciones.

Razón de anchos $\frac{l_1}{l_o} = 2{,}32$				Razón de anchos $\frac{l_1}{l_o} = 4{,}25$			
α	ξ	α	ξ	α	ξ	α	ξ
7°18	0,279	54°22	1,110	8°45	0,274	39°14	1,035
11°52	0,209	80°26	1,096	11°20	0,142	62°04	1,131
15°16	0,208	95°46	1,02	15°20	0,224	99°38	1,030
29°18	0,412	180°	1,00	29°56	0,765	180°	0,99

El ángulo α es el doble del que forma cada pared lateral con el eje de la corriente.

Con estos valores se ha trazado el gráfico adjunto (*fig. 141*) que permite la rápida interpolación. Como puede verse, la variación de ξ es como la del número de Gibson, viene de ∞ para $\alpha = 0$; tiene un mínimo a los *11°*, un máximo a los *63°* de *1,13* y vale prácticamente la unidad en los *180°*. No volveremos a comentar aquí esta variación, pues ya lo hemos hecho en los contornos cerrados, bástenos decir, para terminar, que los ensanchamientos paulatinos experimentados por Büchi en los enormes embudos de salida de túneles del canal de la Aluminium Industrie, derivados del Ródano, dan resultados concordantes con el gráfico citado (1).

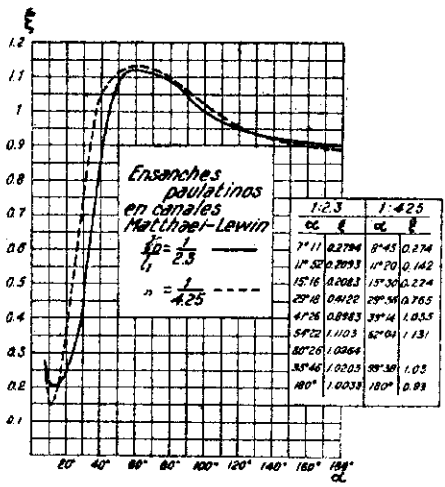

Fig. 141

EJEMPLO.—Un canal de *1* m. de ancho se ensancha por medio de un embudo de *5* m. de largo a *2* m. conservando la forma rectangular que tenía antes del ensanche. ¿Qué profundidad tiene antes del ensanche la corriente si al

(1) Beobachtungen über Geschwindigkeitshöhen bei Profiländerungen in Kanälen. Schweizerische Bauzeitung, de 21 de Agosto de 1920. Los valores muy grandes de ξ correspondientes a los ángulos con, como en el número de Gibson, debidos a los frotamientos que crecen en una razón de secciones terminales dada, pues la longitud crece en ese caso inversamente con el ángulo. Para ángulo cero, corresponde latitud infinita.

final de él es de *0,8* m. si el gasto que escurre es de *1* m³.s y el fondo no varía de cota en el ensanche?

El ángulo de ensanche es:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{(2-1)}{2\times 5} = 0,1$$

$\alpha = 11°30'$; por lo tanto, como $\frac{l_1}{l_o} = 2$, el valor experimental es $\xi = 0,21$.

La aplicación de la ecuación de Bernoulli agregando al segundo miembro la pérdida de carga $\xi\frac{(U_o - U_1)^2}{2g}$ conduce a la ecuación siguiente:

$$h_o + \frac{U_o^2}{2g} = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} + \xi\frac{(U_o - U_1)^2}{2g}$$

Para el cálculo procederemos por tanteos formándonos previamente idea, como en casos análogos, de la magnitud de la pérdida de carga.

La aplicación de la fórmula de Borda, conduce, como se vió, a la ecuación:

$$X_o = \frac{1}{2}\left(X_1 + \frac{1}{X_1^2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(X_1 + \frac{1}{X_1^2}\right)^2 - \frac{n}{X_1}}$$

en este caso $h_{c1} = 0,294$, o sea $X_1 = 2,72$. Además, $n = 2$. Se obtendría, por lo tanto, aplicándola:

$$x_o = 1,427 + 1,140 = 2,567$$

es decir, $h_o' = 2,567 \times 0,294 = 0,755$ m., a la que corresponde $\frac{U_o^2}{2g} = 0,09$ m. y da una suma de Bernoulli inicial de *0,845*. m. Como la altura de velocidad final es $\frac{U_1^2}{2g} = \frac{0,625^2}{2g} = 0,02$, la suma de Bernoulli después del ensanche es $B_1 = 0,82$. La fórmula de Borda daría $\Lambda = 0,845 - 0,82 = 0,025$. En nuestro caso,

$$\Lambda = 0,21\frac{(U_o - U_1)^2}{2g}$$

es decir, como $\frac{1}{5}$ de *0,025*. No puede determinarse exactamente a priori, porque U_o no va a ser el que corresponde a la aplicación de la fórmula de Borda. Aceptando para tantear $\Lambda = 0,006$ tendríamos:

$$B_o = B_1 + 0,006 = 0,82 + 0,006 = 0,826$$

La profundidad crítica antes del ensanche es $h_{co} = 0,47$ y, por lo tanto, usando la **Tabla N.° 3** obtenemos para:

$$\frac{B_o}{h_{co}} = \frac{0,826}{0,47} = 1,755; \quad \frac{h_o}{h_c} = 1,54; \quad h_o = 0,724; \quad \text{y} \quad U_o = 1,38,$$

valores con que se verifica la pérdida de carga:

$$\Lambda - \frac{(1,38 - 0,625)^2}{2g} \times 0,21 = 0,0062$$

es decir, que el tanteo es definitivo.

Hay que notar que en caso que se tenga después del ensanche un Bernoulli menor que el crítico que correspondería al gasto en la sección más angosta anterior a él, tendremos en éste punto un escurrimiento crítico y no será necesario calcular la pérdida de carga para obtener el eje hidráulico de aguas arriba. Si en el ejemplo anterior suponemos que la altura posterior al ensanche es *0,60* en vez de *0,80* m, y que todo lo demás permanece igual, como la velocidad es ahí $\frac{1}{1,2} = 0,83$ m:s será:

$$B_1 = 0,60 + \frac{0,83^2}{2g} = 0,635 \text{ m.}$$

La profundidad crítica de antes del ensanche es: $h_{co} = 0,47$, la suma de Bernoulli crítica es $\frac{3}{2} h_{co} = 0,705$ y la velocidad crítica es $U_o = 2,14$. Si el eje fuera ligado la pérdida de carga sería:

$$\Lambda = \xi \frac{U_o - U_1)^2}{2g} = 0,21 \frac{(2,14 - 0,83)^2}{2g} = 0,018$$

Como este valor, agregado a la suma de Bernoulli de aguas abajo es aún inferior a la suma de Bernoulli crítica antes del ensanche, ahí hay escurrimiento crítico. En efecto:

$$0,63 + 0,018 < 0,705$$

Cuando el exceso de suma de Bernoulli crítico antes del ensanche sobre la suma de Bernoulli posterior a él es grande, puede suceder que el resalto sea rechazado por la corriente afluente. Para averiguarlo hay que hacer el trazado del eje hidráulico del posible torrente y de las alturas de río hasta donde puede llegar en resalto, usando los métodos ordinarios que estudiaremos en los canales. En ese caso *no hay ensanche de la corriente* aunque la canalización se ensanche. Estas observaciones son válidas para todas las formas de ensanches del lecho, aun para los bruscos.

65. Longitud de ensanche.—Para terminar cuanto se refiere a ensanches y completar el trazado del eje hidráulico en los extremos de esta singularidad es útil conocer la *longitud de ensanche*, llamando así la espacio necesario d (*Fig. 142*) para que toda la sección final de la canalización participe del escurrimiento. Al tratar de los resaltos, hemos hablado en especial de la *longitud de resalto*, que es prácticamente la misma longitud de ensanche, pues ésta como aquélla son el largo de canal ocupado por el «*líquido muerto*» o torbellinos que no participan de la translación general.

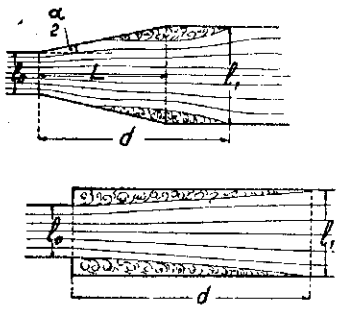

Fig. 142

Como apéndice de las experiencias hechas en Chile, citadas anteriormente, se pueden dar las siguientes expresiones experimentales para los diferentes casos de ensanche que se indican. En ensanchamientos bruscos con grada de bajada y variación de ancho, en lechos rectangulares se puede dar la fórmula:

$$\frac{d}{h_1} = 0{,}6\, n \left(1 + \frac{a}{h_o}\right) \left[n \left(1 + \frac{a}{h_o}\right) - 1 \right] \qquad (25$$

en que h_o y h_1 son las profundidades sobre la grada y final, n la relación de anchos y a la altura de la grada. Esta fórmula experimental es válida para las relaciones $\frac{a}{h_o}$ comprendidas entre *0,25* y *1* y razón de secciones $\frac{\Omega_1}{\Omega_o} = \frac{l_1 h_1}{l_o h_o}$ comprendidas entre *1,5* y *5*. En el gráfico de la *fig. 143* aparecen los resultados de esta fórmula entre sus límites de aplicación.

Para ensanches paulatinos sin variación del fondo, la longitud de ensanche es, fácilmente, superior al largo L, en que las paredes se abren. Se observa que la vena se une a las paredes, pero luego se separa de ellas (*fig. 142*), para encontrarlas a una distancia d, contada desde el comienzo de la singularidad que obedece a la fórmula experimental,

$$\frac{d}{l_1} = 7{,}25 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{\pi - \alpha}{\pi \sqrt{sen \frac{\alpha}{2}}} \qquad (26$$

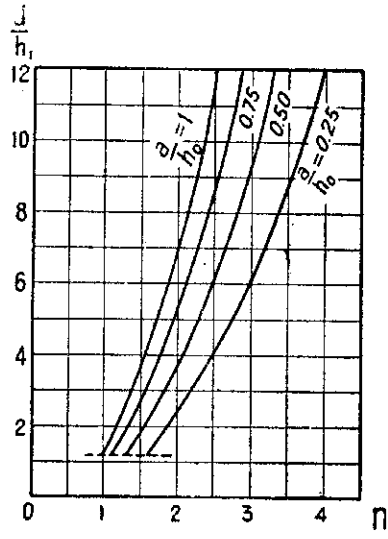

Fig. 143

en que n es, como antes, la relación de anchos $\frac{l_1}{l_o}$, y α el ángulo de ensanche.

Esta expresión es válida siempre que d sea superior a L, hecho que se verifica en ángulos superiores a 15°, siempre que n no sea muy cercano a la unidad. A medida que el ensanche se hace pequeño, es decir, $\frac{l_1}{l_o} = n$, tiende a la unidad, la longitud de ensanche es igual a L, es decir que no se produce la separación de la vena que antes se indicó (1). El gráfico de la *fig. 144* resume estos hechos y da los valores

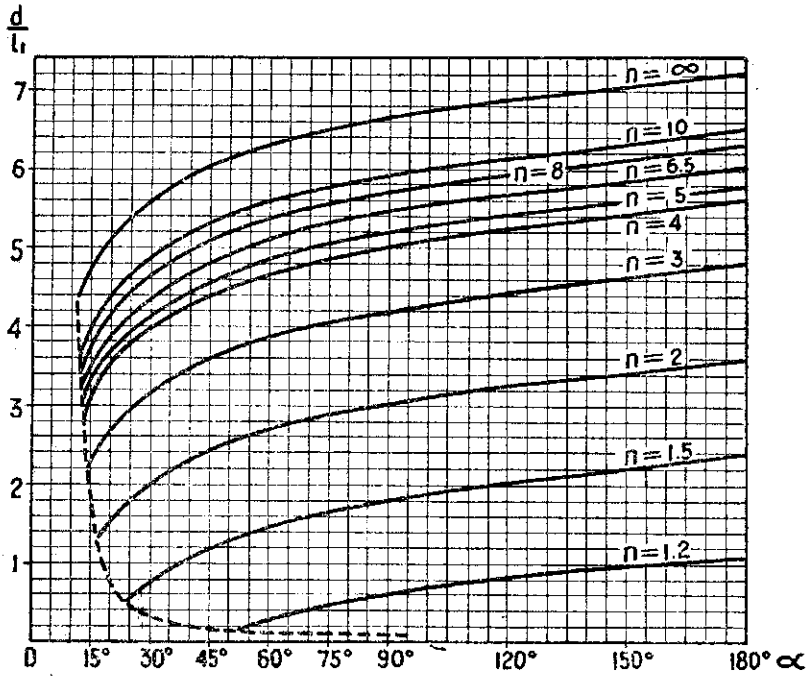

Fig. 144

de $\frac{d}{l_1}$ para el uso de la fórmula. En caso de $\alpha = 180°$, es decir, en ensanches bruscos sin variación de fondo, el segundo término de la ecuación se anula y podría ponerse, simplemente,

$$\frac{d}{l_1} = 7{,}25 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad (27$$

(1) Esta unión inicial a las paredes y separación posterior, claramente puesta de relieve en la *fig. 142*, significa una expansión inicial mayor que la suave que le sigue. Vendría a explicar este fenómeno el hecho constatado por los experimentadores chilenos S. Finlay y J. Altamirano (Pérdida de carga por ensanches en canales no torrentosos, 1926, pág. 2) que dicen: «Un hecho que tiene una novedad práctica predominante es que la pérdida de carga no aparece realizándose paulatinamente a lo largo del ensanche, sino que, al contrario, se verifica muy rápidamente en las inmediatas cercanías de la sección inicial de éste, en forma tal que las observaciones presentan ahí una discontinuidad absoluta, y que la pérdida de carga no aumenta sensiblemente hacia aguas abajo.

66. Embudos de entrada.— Los angostamientos paulatinos de la sección de los canales, como los conos convergentes de las singularidades en contorno cerrado están afectados de pérdida de carga debida únicamente a los frotamientos. Les es aplicable la ecuación de resistencia de aquéllos (1) que en función de la altura de velocidad final, se puede escribir:

$$\lambda_f = \frac{gb}{tg\,\frac{\alpha}{2}}\left(1-\frac{\Omega^2}{\Omega_o^2}\right) \qquad (28$$

En secciones rectangulares o trapeciales se puede llamar α el ángulo que forma cada lado con la dirección de la corriente, en caso general, en secciones de forma cualquiera, su definición será incierta. En canales rectangulares que escurren como ríos, alejados de la crisis, con pequeñas velocidades, las alturas finales difieren poco, de modo que la razón $\frac{\Omega}{\Omega_o}$ puede tomarse como la razón de los anchos. Con la anotación del párrafo 62 sería $\frac{1}{n}$. El coeficiente b, en cambio, no tiene aquí un valor único, pues, a pesar que estos embudos son siempre de sección revestida, b depende del radio hidráulico. Más lógico parece tomar valores sencillos de b que tratándose de paredes lisas, como es el caso de la práctica, pueden ser los siguientes:

Radio hidráulico =	*0,2*	*0,6*	*1 m*
b =	*0,0003*	*0,0002*	*0,00017*

y se tendrá, en consecuencia,

gb =	*0,003*	*0,002*	*0,0017*

El valor del coeficiente de resistencia varía, entonces, con la magnitud del embudo. La razón $\frac{\Omega^2}{\Omega_o^2}$ es, en general, pequeña al lado de la unidad, además, con valores aproximados de gb no es lógico preocuparse de la exactitud del paréntesis de la ecuación (28, de modo que prescindiendo de esa razón se pueden dar los siguientes valores de λ_f:

para R =	$\frac{\alpha}{2}$ =	1°	3°	5°	10°	20°	25°	30°
	0,2 m =	0,35	0,11	0,07	0,035	0,017	0,014	0,012
	0,6 m =	0,23	0,076	0,046	0,023	0,011	0,009	0,008
	1 m =	0,20	0,063	0,039	0,020	0,009	0,008	0,006

(1) Ecuación (31, del § 35, del capítulo V, pág. 126.

Coinciden con estos resultados las experiencias de los embudos del canal de la Aluminium Industrie, hechas por Buchi (1), que en radios medios grandes de cerca de *1,5* m. y ángulos cercanos a *3°* han dado en término medio $\lambda_f = 0{,}06$. También coinciden las pocas experiencias chilenas en embudos de forma de boquilla asimilables a los de pequeño ángulo (menor de $\frac{\alpha}{2} = 5°$), que con radios hidráulicos variables entre *1* m. y *0,5* m. han dado λ_f variable de *0,03* a *0,10*.

67. Remanso producido por los machones de un puente.—Este problema, que consiste en determinar la diferencia de altura de aguas arriba y abajo del estrechamiento que provocan en una corriente los machones de un puente, es una aplicación de la teoría de los ensanchamientos bruscos y paulatinos. Pocas cuestiones prácticas han preocupado más a los hidraulistas, ya sea teóricos o experimentales, que el remanso que produce el paso del agua entre los machones de un puente. Sin pretender clasificar ni abarcarlos a todos, basta citar a Dubuat (1786), Vicat (1836), D'Aubisson (1840), Navier (1843), Weisbach (1855), Rühlmann 1880), Wex (1888), Montanari (1891), Lorenz (1910); Nagler (1917) y Rehbock (1919). Todos los textos de Hidráulica tratan el problema, algunos con gran extensión. A la importancia desmedida que se le ha atribuído al estudio del remanso que producen los machones del puente es necesario agregar que la gran mayoría de las fórmulas experimentales, y aun las teóricas presentadas, son o de aplicación muy restringida o groseramente erradas. Weyrauch (2) hace notar, con un ejemplo, la discrepancia enorme entre los resultados de las fórmulas más consideradas. ¿A qué se debe esta doble anomalía? La importancia dada al problema es debida a la aparición del resalto y velocidades peligrosas en el torrente que le precede, en los momentos de creces. Esto sucedía en grandes corrientes bajo los puentes de albañilería de machones muy anchos, que hoy día tienden a desaparecer. La segunda, o sea la poca exactitud de las fórmulas propuestas es debida al desconocimiento de la energía mínima que fácilmente se presenta en las partes más estrechas, cuando la suma de Bernoulli de la corriente en la sección que sigue al puente es pequeña.

Las experiencias hechas en machones de puente han dado formas del eje hidráulico muy diversas, lo que ha desconcertado a los experimentadores, especialmente a los antiguos. En realidad, la diversidad de formas corresponde precisamente a los diversos casos que pueden presentarse, que podremos resumir en tres. 1.° Eje ligado, es decir, profundidad de aguas arriba que depende de aguas abajo. 2.° Eje desligado porque entre los machones se produce escurrimiento crítico con resalto al pie; y 3.° Eje desligado y resalto rechazado, porque la corriente entre los machones tiene energía para producir un torrente, que finalmente vuelve al río de aguas abajo por medio del resalto. El eje hidráulico del primer caso tiene la forma de una depresión entre los machones. El segundo puede tener la forma de una depresión o ser un escalonamiento de un nivel más alto anterior, uno intermedio entre los machones y uno menor posterior que corresponde a la profundidad de aguas

(1) Beobachtungen über Geschwindigkeitshöhen bei Profiländerungen in Kanälen.—Schweizerische Bauzeitung, de 21 de agosto de 1920.

(2) Hydraulisches Rechnen, última edición 1921, págs. 238 y sgts.

abajo. El tercer caso será siempre de eje hidráulico escalonado, siendo el escurrimiento crítico entre los machones seguido de un torrente de poca altura que recupera el nivel de aguas abajo por medio del resalto. En el segundo caso, eje desligado con resalto que cubre la napa, se produce aguas abajo del escurrimiento crítico un torbellino de eje horizontal o cilíndrico líquido, como lo llama Rehbock, situado encima de la corriente, análogo al que se observa en los resaltos.

En Chile, este problema ha sido resuelto racionalmente desde que el profesor Dn. Ramón Salas dió a conocer su teoría del escurrimiento crítico (1914), y hoy día, gracias a las experiencias hechas en ensanchamientos bruscos y paulatinos (1) se puede hacer el cálculo de las pérdidas de carga con acierto. Puede determinarse con precisión suficiente en todos los casos, la diferencia de nivel entre aguas arriba y abajo de los machones de un puente y preverse con seguridad la forma del eje hidráulico.

Rehbock y Böss (1919), en Alemania, distinguieron la desligadura posible del eje hidráulico, observando los tres casos que dejamos anotados. Da Rehbock fórmulas empíricas para el cálculo del remanso en los tres casos y para los límites en que la desligadura del eje y el rechazo del resalto se producen (2). Las expresiones que dan la altura del remanso parecen muy acertadas y sus resultados están en entera concordancia con el procedimiento racional que expondremos. Las fórmulas que dan los límites entre los tres casos de eje hidráulico tienen pequeños defectos, debido, sin duda, al hecho de no haberse considerado en ellas el mínimum de energía.

En un angostamiento producido por los machones de un puente (3) se pueden considerar cuatro secciones. La final E (*fig. 145*), que, generalmente, depende de las condiciones de aguas abajo, pues en ella hay un río. En esta sección ya ha terminado la perturbación introducida por el machón. La D al final del angostamiento, o sea, al empezar el ensanche. La B, la sección teóricamente más estrecha por la contracción de la vena líquida que puede provocar el machón y la A, de aguas arriba donde todo el ancho L de la corriente participa del escurrimiento. El remanso que interesa determinar es z, diferencia entre las profundidades h_a y h_e, siempre positivo.

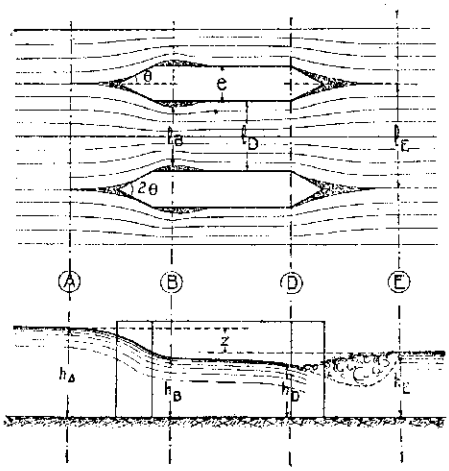

Fig. 145

Entre D y E hay una pérdida de carga por ensanche, que depende en parte

(1) Experiencias citadas en los § 62 y 64.

(2) Zur Frage des Brückenstaues – Zentral bl. der Bauverwalt, 1919, N.° 37.

(3) Aquí suponemos lecho de forma invariable, es decir, sin socavaciones posibles, que son frecuentes en la realidad. Ese problema es diverso del que aquí tratamos.

de la forma geométrica de la punta de aguas abajo del machón. Según las experiencias de Nagler (Universidad de Iowa EE. UU., (1917) (1) la forma que menos pérdida de carga produce es la de doble curva (*fig. 146*), poco práctica en una construcción y a la cual se pega la vena. Es equivalente a un ensanche paulatino de ángulo inferior a *30°*. En caso de tener esta punta un ángulo *2 θ*, como en la *figura 145* se tendrá un ensanche paulatino correspondiente a ese ángulo, si no hay punta se tratará de un ensanche brusco.

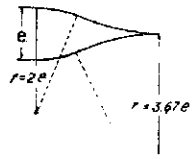

Fig. 146

Entre *D* y *B* habrá un ensanche de reacción debido a la contracción de *B*; este ensanche equivale, como se ha dicho en el § 62, a uno brusco sin variación de fondo y frotamientos, que habrá que considerar si la longitud del machón es grande. La contracción de entrada puede suprimirse prácticamente con una punta de forma adecuada. La mejor punta de entrada es la ojival, cuyos arcos tienen un radio tres veces el ancho, según Nagler, o solamente dos veces según Rehbock *fig. 147*, pues no produce contracción. Muchos experimentadores dan el coeficiente de contracción, o relación entre el ancho útil l_B y el ancho l, entre machones únicamente en función de la forma de la punta de entrada, lo que no puede generalizarse, pues depende en realidad del valor de l. Más racional es lo que hace Rehbock, de dar el ancho $e + 2\varepsilon$, es decir, el total del estorbo que el machón introduce, en función de su ancho e. Esta relación que Rehbock llama δ tiene los siguientes valores (2):

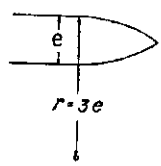

Fig. 147

	$\delta = \dfrac{e + 2\varepsilon}{e}$	$\dfrac{\varepsilon}{e}$
Puntas ojivales	*1,00*	*0*
Puntas semicirculares	*1,20*	*0,10*
Puntas de ángulos *2 θ*	*1 + 0,35* sen *θ*	*0,175* sen *θ*
Machón sin punta o de sección rectangular (*2θ = 180°*)	*1,35*	*0,175*

La contracción viene a valer ε por cada lado de un machón, a una distancia que es más o menos 2ε de la arista de entrada; de modo que a esa distancia de la entrada de la parte angosta se encuentra la sección que hemos llamado *B*.

Entre *B* y *A* hay un embudo de entrada, cuya pérdida de carga, de frotamiento únicamente, le calcula por medio de los coeficientes dados para ellos en el § 66.

Para el cálculo del remanso se considera la parte de la corriente comprendida entre los ejes de dos machones contiguos, tomando el gasto correspondiente a la parte $\frac{l_E}{L}$ que es la relación entre el ancho entre dos ejes de machones contiguos

(1) Obstruction of bridge piers to the flow of water. Proc. A. S. C. E. (1917 y 1918).

(2) Abflus, Stau un Walzenbildung bei fliessenden gewässern, etc. Rehbock, 1917, pág. 101. No consideramos la división en superficies lisas y rugosas, pues los frotamientos los calculamos aparte.

y el ancho total de la corriente aguas arriba o abajo de los maçhones. El remanso z, queda dado por la aplicación del teorema de Bernoulli desde E a A, si agregamos a la suma de Bernoulli de E las pérdidas de carga $\Sigma\Lambda$ del camino; la aplicación de Bernoulli nos da:

$$h_A + \frac{U_A^2}{2g} = h_E + \frac{U_E^2}{2g} + \Sigma\Lambda$$

y, en consecuencia, el remanso será:

$$z = h_A - h_E = \frac{U_E^2 - U_A^2}{2g} + \Sigma\Lambda \qquad (29$$

Según lo dicho, las pérdidas de carga son:

$$\Lambda_{ED} = \xi \frac{(U_D - U_E)^2}{2g}; \qquad \Lambda_{DB} = \frac{(U_B - U_E)^2}{2g} + J_{BD}; \qquad \Lambda_{BA} = \lambda_{BA} \frac{U_B^2}{2g}$$

estas fórmulas son válidas en caso de eje ligado. En caso de producirse el escurrimiento crítico en B, se tendrá en A una suma de Bernoulli igual a la crítica de B más la pérdida en el embudo $\lambda_{AB} \frac{U_B^2}{2g} = \lambda_{AB} \frac{h_{cB}}{2}$; en este caso se puede escribir en lecho rectangular, que es el único que consideraremos entre los machones:

$$h_A + \frac{U_A^2}{2g} = \frac{3}{2} h_{cB} + \lambda_{AB} \frac{h_{cB}}{2} = \frac{3 + \lambda_{AB}}{2} h_{cB}$$

y el remanso z sería:

$$z = \frac{3 + \lambda_{AB}}{2} h_{cB} - \frac{U_A^2}{2g} - h_E \qquad (30$$

En estas expresiones y en lo que sigue se indican las profundidades críticas con el sub-índice c y las letras de la sección respectiva.

Para conocer si el eje es ligado o no, basta agregar al Bernoulli de E las pérdidas entre B y E y comparar esta adición con $\frac{3}{2} h_{cB}$. Si $\frac{3}{2} h_{cB}$ es mayor que esa suma, es desligado y en B hay escurrimiento crítico. Para averiguar si el resalto es rechazado, cuando hay en B crisis, basta trazar por puntos el torrente desde B hacia aguas abajo, calculando a qué altura puede llegar en cada punto en resalto. Si las alturas donde puede llegar son mayores que la del río de aguas abajo, será rechazado el resalto.

El cálculo es sencillo usando la **Tabla N.° 3** del capítulo III, páginas 70 y 71, de $\frac{B}{h_c}$ procediendo respecto a las pérdidas de carga, como se ha indicado anteriormente.

En un ejemplo que va a continuación se muestran todos los casos posibles de ejes hidráulicos debidos a la presencia de los machones de un puente, y de paso damos las fórmulas empíricas de Rehbock, cuya coincidencia con estos cálculos queda de manifiesto, notando las pequeñas deficiencias teóricas en los límites de desligazón del eje y de resalto rechazado.

EJEMPLO.—Un canal de *10* m. de ancho de sección rectangular, tiene un machón central y dos mitades laterales de las dimensiones y forma que indica la *figura 148*. Se pide determinar el remanso que se produce por estos machones cuando escurre un gasto de *20* m³:s en los tres casos siguientes: *a*) La profundidad aguas abajo de los machones es de *2,5* m. *b*) Esa profundidad es de *1,25* m. *c*) La profundidad de aguas abajo es de *1* m. Entre *A* y *E* el lecho no tiene pendiente.

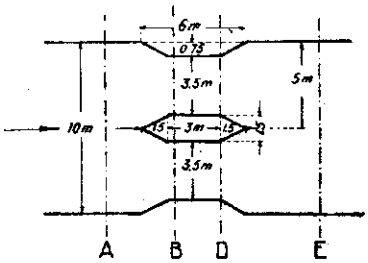

Fig. 148

En la *figura 148* se han señalado las secciones interesantes para el cálculo del remanso. El ángulo del embudo de entrada, igual en nuestro ejemplo al de salida, es de $2\,\theta = 53°20'$ y, por lo tanto, el coeficiente de resistencia del embudo de entrada es $\lambda_{AB} = 0{,}009$, pues los radios hidráulicos serán mayores de *0,6* m. Como $\frac{l_E}{l_D} = \frac{5}{3{,}5} = 1{,}43$, el coeficiente ξ vale *1,10* más o menos, en el ensanche paulatino que hay entre *D* y *E*. La contracción en *B* vale $\frac{\varepsilon}{e} = 0{,}175 \; sen \frac{53°20}{2} = 0{,}0785$, o sea, $\varepsilon = 0{,}0785 \times 1{,}5 = 0{,}118$ m. El ancho útil al escurrimiento en *B* es, pues, $l_B = 3{,}5 - 2 \times 0{,}118 = 3{,}264$ m. La sección contraída está *0,24* m. aguas abajo del comienzo del angostamiento. El δ de Rehbock vale *1,157*.

Podemos suponer, como se dijo, que el gasto se reparte por iguales partes entre los huecos dejados por los machones, y estudiar el fenómeno por entre dos machones con el gasto correspondiente. En nuestro caso, el gasto entre machones es $Q = 20 \times \frac{l_E}{L} = 20 \times \frac{5}{10} = 10$ m³:s.

Las profundidades críticas, sumas de Bernoulli crítico, etc. correspondientes a este gasto en las cuatro secciones son:

Sección	l	q	h_c	U_c	$\frac{U_c^2}{2g} = \frac{h_c}{2}$	$B_c = \frac{3}{2} h_c$
E	5	2	0,741	2,69	0,371	1,112
D	3,5	2,86	0,941	3,04	0,471	1,412
B	3,264	3,07	0,985	3,11	0,493	1,478
A	5	2	0,741	2,69	0,371	1,112

Caso a).—Es dato $h_E = 2,50$ m. y por lo tanto se tiene:

$$U_E = \frac{2}{2,5} = 0,8 \text{ m:s}; \qquad \frac{U_E^2}{2g} = 0,0325; \qquad B_E = 2,533 \text{ m.}$$

La pérdida por ensanche paulatino Λ_{DE}, se calcula por tanteos; aceptando para empezar a tantear, $\Lambda_{DE} = 0,007$, se tendría $B_D = 2,533 + 0,007 = 2,540$ m. a lo que corresponde: $\frac{B_D}{h_c} = \frac{2,540}{0,941} = 2,7$; $\frac{h_D}{h_c} = 2,620$; $h_D = 2,46$; $U_D = 1,15$; $\Lambda_{DE} = 1,10 \frac{(1,15 - 0,8)^2}{2g} = 0,006$, quedando comprobado el valor de Λ_{DE}, pues pues resulta prácticamente igual al supuesto, el tanteo es definitivo.

Entre D y B, hay ensanche de reacción, con los siguientes datos: $X_1 = \frac{h_D}{h_c} = 2.62$; $n = \frac{l_D}{l_B} = \frac{3,50}{3,264} = 1,07$, que daría: (1)

$$X_o = \frac{1}{2}\left(2,62 + \frac{1}{2,62^2}\right) + \sqrt{1,92 - 0,48} = 2,613$$

por lo tanto: $h_B = X_o \times 0,941 = 2,46$ m. A esto correspondería $\frac{h_B}{h_{cB}} = 2,50$ $\frac{B_B}{h_{cB}} = 2,59$; es decir, un Bernoulli $B_B = 2,550$ m. o sea que la pérdida es insignificante.

Hay que agregar la pérdida de frotamientos en el trayecto BD de: $3 - 0,24 = 2,76$ m. de longitud, que dada la poca diferencia entre las secciones terminales se puede calcular simplemente multiplicando la pérdida de carga por unidad de longitud correspondiente a la sección D por la distancia DB; $\Lambda_{DB} = J_B \times 2,76$. El valor de J_B, obtenido por los procedimientos ordinarios de los canales, suponiendo un coeficiente de rugosidad $n = 0,017$ de Kutter es: $J_B = \frac{U^2_D}{C^2 R_D} = 0,0004$. La pérdida de frotamientos es pues $\Lambda_{DB} = 0,001$.

Agregando simplemente a la suma de Bernoulli de D la suma de las pérdidas dadas por estos dos cálculos (dada la pequeñez de ellos), se tendrá $B_B = 2,55 + 0,002 = 2,542$ m. y por lo tanto $h_B = 2,49 \times 0,985 = 2,45$; $\frac{U^2_B}{2g} = 0,052$. La suma de Bernoulli $2,552$ m. es mayor que la crítica que corresponde a la sección B, y por lo tanto el eje es ligado.

La pérdida en el embudo de entrada es $\Lambda_{AB} = 0,009 \times 0,052 = 0,0005$, que es tan pequeña que no vale la pena agregarla a B_B. Se tiene finalmente $B_A = 2,552$; $\frac{B_A}{h_c} = 3,445$; $\frac{h_A}{h_c} = 3,41$; $h_A = 2,52$ m.

(1) Fórmula (7, del § 62.

El remanso producido por los machones, es entonces $z = 2.52 - 2,50 = 0,02$ m.

Rehbock llama «*estorbo*» a la relación $\alpha = \frac{\Sigma e}{L}$, entre la parte de ancho ocupada por los machones y el ancho total de la corriente, y llama «relación de escurrimiento» a la razón $\omega = \frac{U^2_E}{2gh_E}$

Da para el eje hidráulico ligado, la fórmula empírica del remanso.

$$z = \alpha\left[\delta - \alpha(\delta - 1)\right]\left[0,4\alpha + \alpha^2 + 9\alpha^4\right]\left[1 + 2\omega\right]\alpha\frac{U_E^2}{2g} \qquad (31$$

y como expresión simplificada, para los casos ordinarios ($0,06 < \alpha < 0,16$ y $0,03 < \omega < 0,12$), con error hasta de 16% la fórmula:

$$z = \alpha\frac{U_E^2}{2g} \qquad (31a$$

En nuestro ejemplo con $\alpha = \frac{3}{10}$; $\omega = \frac{0,0325}{2,5} = 0,013$ y $\delta = 1,157$ tendríamos:

$$z\left[1,157 - 0,3 \times 0,157\right]\left[1,2 + 0,09 + 0,0729\right]\left[1 + 0,026\right]\ 0,3 \times 0,0325 = 0,015 \text{ m.}$$

Caso b.— $h_E = 1,25$; $U_E = 1,6$ m:s; $\frac{U_E^2}{2g} = 0,13$ m; $B_E = 1,38$ m.

La suma de Bernoulli mínima que puede haber en D es la crítica $B_D = 1,412$. Tanteando la pérdida de carga con la diferencia $\Lambda = 1,412 - 1,38 = 0,032$, que supondría crisis en la sección, se tiene $U_D = 3,04$ m:s y $\Lambda_{DE} = 1,10\ \frac{(3,04 - 1,6)^2}{2g} = 0,107$. Como este valor es mayor que el supuesto, en D no hay suma de Bernoulli crítica. El tanteo definitivo corresponde a $\Lambda = 0,057$ m., es decir, $B_D = 1,437$ m.; $\frac{B_D}{h_{cD}} = 1,53$; $\frac{h_D}{h_{cD}} = 1,165$; $h_D = 1,097$; $U_D = 2,61$ m:s., que verifica el valor de pérdida

$$\Lambda_{DE} = 1,1\ \frac{(2,61 - 1,6)^2}{2g} = 0,057$$

Entre D y B la pérdida de frotamientos $2,64 \times J_D = 0,0034 \times 2.64 = 0,009$ y la de ensanche brusco no puede pasar del valor $0,012$ que correspondería a la existencia de la velocidad crítica en B. Se tendría así $B_B = 1,44 + 0,009 + 0,012 = 1,461$, que por ser menor que el crítico es imposible, y sencillamente en B hay escurri-

miento crítico con $B_B = 1,478$. El eje es pues desligado, pero muy cerca del límite de ser ligado.

La pérdida de carga del embudo AB es $0,004 \times 0,493 = 0,002$ y la suma de Bernoull de A es $B_A = 1,478 + 0,002 = 1,480$ m., a la que corresponde $h_A = 1,38$ m.

El remanso es, pues:

$$z = 1,38 - 1,25 = 0,13 \text{ m.}$$

Rehbock dice que el eje hidráulico es ligado cuando,

$$(\alpha + 0,13)\ (\omega + 0,046) \leq 0,048 \qquad (32$$

como es dato α, despejando ω se obtiene:

$$\omega \leq \frac{0,048}{\alpha + 0,13} - 0,046 \qquad (32a$$

introduciendo el valor $\alpha = 0,3$ del ejemplo, esta ecuación da $\omega \leq 0,0656$, es decir, que el eje se desliga, o sea, hay escurrimiento crítico si $\omega \leq 0,0656$. En el ejemplo, caso *b*), tenemos $\omega = \frac{0,13}{1,25} = 0,104$ y el eje es desligado, como hemos visto (1).

Sin embargo, la expresión del límite de Rehbock debe ser usada con cautela, pues dice que para $\alpha = 0$, es decir, si no hay machones, el eje se desliga si $\omega = \frac{U_c^2}{2gh_E} = 0,328$, relación que se verifica cuando la profundidad de aguas abajo es $1,24$ de la crítica en vez de ser igual a ella.

El remanso, según Rehbock, para el caso *b*) de eje desligado y resalto al pie está dado por la expresión

$$z = \left[\delta + \alpha(\delta - 1)\right] \quad (21,5\,\alpha + 33\,\omega - 6,6)\,\alpha \frac{U_E^2}{2g} \qquad (33$$

válida para $0,6 < \alpha < 0,3$

Introduciendo los valores del caso *b*): $\alpha = 0,3$; $\omega = \frac{0,13}{1,25} = 0,104$ se obtiene:

$$z = 1,11\ (21,5 \times 0,3 + 33 \times 0,104 - 6,6)\ 0,3 \times 0,131 = 0,14 \text{ m.}$$

Caso c.—$h_E = 1$ m.—Como esta profundidad es menor que la que desliga el eje, se tiene sencillamente, como en el caso *b*), independencia entre aguas arriba y aguas

(1) El valor $\omega = 0,104$ corresponde a $h_E = 1,26$ m., que deja ver lo cerca del límite que está la profundidad del caso *b*), $h = 1,25$ m. Aplicando el teorema de Bernoulli generalizado h_E límite $= 1,29$ m.

abajo del machón, pues en B hay escurrimiento crítico. Según esto $h_A = 1,38$ m. Por lo tanto,

$$z = 1,38 - 1,00 = 0,38 \text{ m.}$$

El trazado del eje hidráulico del posible torrente de B hacia E revela que el resalto es rechazado. La distancia d en que se verifica la expansión total de la vena obedece a la expresión experimental (26, que para el ángulo de ensanche de $53°$ $20'$ y relación de ensanche $n = \frac{5}{3,5} = 1,43$, según el gráfico de la *figura 144*, vale $\frac{d}{l_1} = 1,15$, es decir $d = 1,15 \times 5 = 5,75$ m., es decir, que toda la sección participa del escurrimiento, $5,75 - 1,5 = 4,25$ m. más aguas abajo que el fin del machón.

Interesa el trazado del eje hidráulico del torrente desde la sección B hacia aguas abajo y la ubicación del resalto. Esta cuestión es propia del estudio de los canales con movimiento variado, sin embargo la ponemos aquí para completar el problema. En la parte superior de la *figura 149* aparece la planta de un machón con la dis-

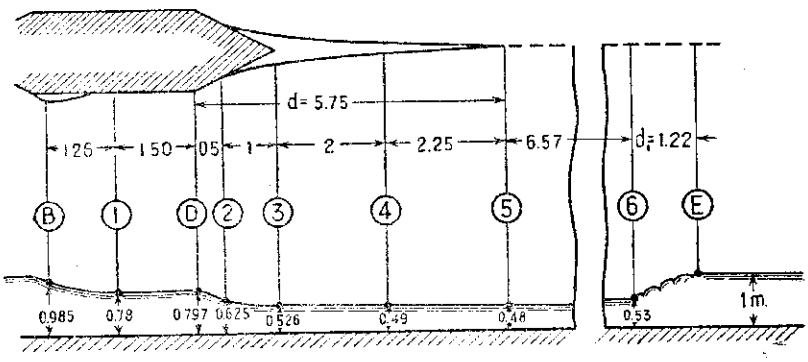

Fig. 149

tancia d en que toda la sección final empieza a ser ocupada por la corriente. También aparecen en esa figura las secciones que se han utilizado en el cálculo del eje hidráulico, que en nuestro caso, en que no tiene pendiente el fondo obedece a la ecuación:

$$B_o = B_1 + J_m l$$

en que B_o es el Bernoulli de la sección de aguas arriba, B_1 el de la sección de aguas abajo, J_m la pérdida de carga «término medio aritmético» de las que corresponden a esas dos secciones y l la longitud que separa ambas secciones. El cálculo se hace por tanteos valiéndose de gráficos de Bernoulli y J correspondientes a cada sección. Los tanteos consisten en la verificación de $J_m l$ dada a priori cada vez. A continuación va el cuadro de valores calculados de las alturas del eje hidráulico en las secciones desde la B hasta la 5 de la *figura 149*. La última columna da las alturas hasta

las cuales puede saltar el torrente en cada sección. Como se ve, todas son mayores que la profundidad del río que realmente existe, que es de *1* m.; por lo tanto será necesario calcular el torrente que puede saltar justamente a *1* m. y después ubicar ese punto del eje hidráulico. El cálculo del resalto es entonces $\frac{h_1}{h_c} = \frac{1}{0{,}741} = 1{,}41$, al que corresponde según el gráfico de la *figura 135*, $\frac{h_o}{h_c} = 0{,}71$, es decir, $h_o = 0{,}71 \times 0{,}741 = 0{,}53$ m.

Sección	*Ancho*	*Distancia entre secc.*	B_o	h	J	J_m	$J_m l$	$B_o - J_m l$	h_1 (*resalto*)
B	3,264		1,478	0,985	0,0054				
1	3,50	1,26	1,468	0,780	0,0086	0,0070	0,0088	1,459	1,116
D	3,50	1,50	1,453	0,797	0,0082	0,0084	0,0126	1,454	1,094
2	4,0	0,50	1,448	0,625	0,0120	0,0100	0,005	1,448	1,140
3	4,5	1,00	1,434	0,525	0,0157	0,0138	0,014	1,434	1,142
4	4,8	2,00	1,402	0,490	0,0170	0,0163	0,0327	1,401	1,120
5	5,0	2,25	1,365	0,480	0,0162	0,0166	0,037	1,365	1,085

El cálculo de las distancias entre las secciones *5* y *6* de la *figura 149* es el ordinario del trazado del eje hidráulico, que no es del caso detallar aquí. Para él se tiene $B_o = 1{,}365$; $h_o = 0{,}48$ m.; $J_o = 0{,}0162$; y para $h_1 = 0{,}53$; $J_1 = 0{,}0125$; $B_1 = 1{,}271$; y por lo tanto,

$$l_{5-6} = \frac{B_o - B_1}{J_m} = \frac{1{,}365 - 1{,}271}{\frac{1}{2}(0{,}0162 + 0{,}0125)} = 6{,}57 \text{ m.}$$

La longitud del resalto obedece a la ecuación (*19*, del § *63*, que reemplazando valores da:

$$\frac{d_1}{h_c} = 1{,}5\left(\frac{1{,}00}{0{,}53} - 0{,}8\right) = 1{,}635$$

es decir, $d_1 = 1{,}635 \times 0{,}741 = 1{,}22$ m.

En consecuencia, la sección *E*, fin de la perturbación que introduce el machón está situada aguas abajo a $5{,}75 + 6{,}57 + 1{,}22 = 13{,}54$ m. de la sección *D*.

En la parte inferior de la *figura 149* aparece dibujado el eje hidráulico del caso *c*, entre *B* y *E*.

Rehbock da para el remanso, en caso de resalto rechazado, la expresión válida para $\alpha < 0{,}9$:

$$z = (0{,}54 + \alpha + 1{,}9\,\alpha^8)\left(\frac{Q}{L}\right)^{\frac{2}{3}} - h_E \qquad (34$$

reemplazando en ella nuestros valores, tendríamos:

$$z = (0{,}54 + 0{,}3 + 1{,}9 \times 0{,}00243 \left(\frac{20}{10}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 1{,}34 - 1 = 0{,}34 \text{ m.}$$

El rechazo del resalto se produce, según Rehbock, cuando

$$\alpha = 0{,}05 + (0{,}9 - 2{,}5\,\omega)^2 \qquad (35$$

o explícita en ω

$$\omega^2 - 0{,}72\,\omega + 0{,}1376 - 0{,}16\,\alpha = 0 \qquad (35a$$

En nuestro caso, con $\alpha = 0{,}3$

$$\omega^2 - 0.72\,\omega + 0{,}0896 = 0$$

$$\omega = 0{,}36 \pm \sqrt{0{,}04} \qquad (35b$$

$$\omega' = 0{,}56 \qquad \omega'' = 0{,}16$$

Como ω es la razón $\frac{U^2}{2\,gh}$, y si toma el valor $0{,}5$ corresponde al escurrimiento crítico, estas raíces corresponden, la $0{,}16$ a un río, y la $0{,}56$ a un torrente. La raíz mayor de $0{,}5$ es siempre inútil, porque si hay un torrente en E, siempre habrá resalto rechazado.

La raíz $\omega = 0{,}16$, corresponde a $h_E = 1{,}083$ m. Con nuestra manera de calcular, ese límite sería $1{,}03$ m. en D; es decir, $1{,}20$ en E.

En resumen, podemos decir que el método racional expuesto coincide muy bien con las expresiones empíricas de Rehbock; los límites, sin embargo, que separan los tres casos de posibles ejes hidráulicos dados por este autor, han de ser comprobados en caso de duda, pudiendo en los demás casos efectuar el cálculo, con suficiente aproximación, por las fórmulas de Rehbock.

Al exponer un ejemplo por medio de este largo cálculo, siguiendo el camino racional, no hemos perseguido otro objeto que hacer ver que el problema tiene una perfecta solución por los métodos ordinarios de la Hidráulica, siempre que se considere la posibilidad de producirse la energía mínima, verdadera directriz de la discusión.

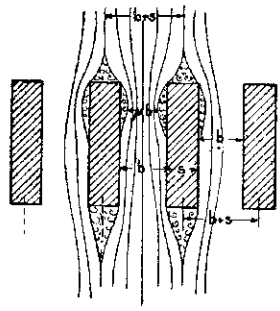

Fig. 150

68. Rejillas. —Como otra aplicación de los ensanchamientos bruscos y paulatinos en canales deben considerarse las rejillas que se introducen para impedir que sigan basuras o cuerpos flotantes. Entre sus barrotes se verifica un escurrimiento análogo al que provocan los machones de un puente, como lo evidencia la *figura 150*, pues se verifica un ensanche de reacción

entre las barras que forman la rejilla y otro ensanche a la salida de los barrotes. Generalmente van colocadas en canales de poca velocidad, de donde resulta que la diferencia entre las alturas de agua entre los barrotes y después de la rejilla es prácticamente despreciable al lado de las alturas mismas, de modo que las velocidades son proporcionales a los anchos y las alturas de velocidad, a los cuadrados de los anchos. Con las designaciones de la *figura 150*, en caso de rejillas de sección rectangular se tendrían las siguientes pérdidas de carga: *a*) entre los barrotes, ensanche de reacción:

$$A_1 = \left(\frac{b}{\mu b} - 1\right)^2 \frac{U_b^2}{2g} = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \frac{U_b^2}{2g}$$

en esta expresión μ se puede calcular con la pequeña tabla de valores dada en la página 106 para contracciones incompletas en contornos cerrados, en función de la razón de los anchos $\frac{d}{d_o}$, que aquí sería $\frac{b}{s+b}$. El valor λ_1, en función de la altura de velocidad U posterior a la rejilla, notando que $\frac{U_b^2}{2g} = \frac{U^2}{2g}\left(\frac{b+s}{b}\right)^2$ sería:

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \left(\frac{b+s}{b}\right)^2 \qquad (36$$

El ensanche brusco a la salida de la rejilla da un factor de resistencia,

$$\lambda_2 = \left(\frac{b+s}{b} - 1\right)^2$$

de manera que la suma de las pérdidas de carga tendrán un factor de resistencia,

$$\Sigma\lambda = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \left(\frac{b+s}{b}\right)^2 + \left(\frac{b+s}{b} - 1\right)^2 \qquad (37$$

Las experiencias de Krischmer y Spangler, hechas en el Laboratorio del Instituto de Hidráulica de Munich (1926), bajo la dirección de Thoma, con rejillas de sección rectangular, con razones $\frac{b+s}{b}$ variables de *1,15* a *2,13* confirman el raciocinio anterior, también lo confirman las de Fellenius y Lindquist, en Estocolmo (1927); notando entre la aplicación de la fórmula (*37* y las experiencias mismas, diferencias pequeñas en los valores de $\Sigma\lambda$. Esto viene a corroborar lo dicho anteriormente, que

en los ensanches bruscos, por simple variación de ancho, es válida la fórmula de Borda (1).

Las experiencias del Instituto de Munich abarcan una gran variedad de secciones de barrotes de rejillas y además consideran el caso de corrientes anteriores a la rejilla que forman en planta con el plano de ellos un ángulo α. En la *figura 151* aparecen algunos de los tipos experimentados y a continuación los resultados experimentales en los casos que se indican:

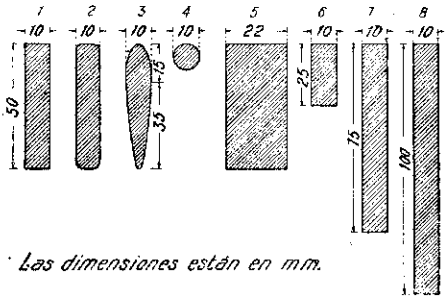

Fig. 151

a) Rejilla rectangular de *10* mm. de ancho y *50* de largo.

$\frac{b}{s+b}$ =		0,47	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,80	0,87
$\Sigma\lambda$ para α	0°	2,78	2,29	1,75	1,35	1,04	0,78	0,37	0,19
	30°	3,81	3,05	2,25	1,77	1,40	1,08	0,69	0,50
	45°	3,95	3,54	2,87	2,25	1,90	1,68	1,28	1,08
	60°	5,28	4,90	4,40	4,20	4,01	3,98	3,75	

b) Experiencias en tipos de formas diversas. (El número se refiere a la figura).

1.° Para $\alpha = 0°$:

$$\lambda = \beta \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{4}{3}} \qquad (38$$

con los siguientes valores de β:

tipo:	1	2	3	4	5	6	7	8
β:	2,34	1,60	0,71	1,73	2,34	2,34	2,34	2,34

(1) He aquí la comparación de la fórmula (37 con las λ experimentales del Instituto de Munich y de Estocolmo:

$\frac{b}{s+b}$ =		0,47	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,87	1,00
$\Sigma\lambda$	fórmula (37 =	2,69	2,21	1,18	0,60	0,40	0,30	0,19	0,00
	Experiencia de Munich =	2,78	2,29	1,35	0,78	0.57	0,37	0,17	
	Experiencia de Estocolmo =					0,46			

2.° Para ángulos α y los $\frac{b}{s+b}$ que se indican, aparecen en los gráficos de la *figura 152* los valores de λ.

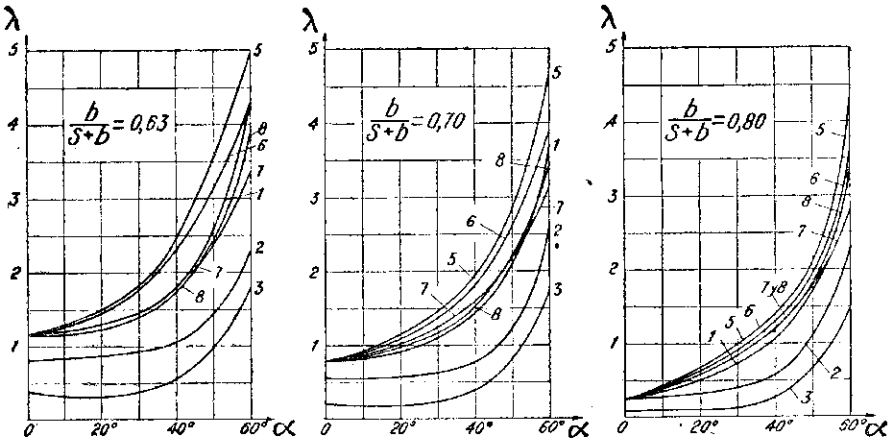

Fig. 152

Todos los factores de resistencia anteriores suponen rejillas verticales; si van colocados con la inclinación ordinaria, respecto a la vertical la pérdida de carga es, prácticamente, la misma. Si se coloca la rejilla vertical, pero formando en planta un ángulo distinto del de 90° con la dirección de la corriente de un canal, aumenta la pérdida con el seno del ángulo de inclinación.

Las experiencias de Lindquist coinciden en líneas generales, con las del Instituto de Munich, con las anotaciones anteriores, él las resume en la fórmula:

$$\Lambda = \mu \ sen \ \alpha \left(\frac{s}{b+s}\right)^2 \frac{U^2}{2g} \qquad (39$$

en que α es el ángulo que forma el plano de la rejilla con la horizontal y μ es un coeficiente cuyos valores, dependientes de la forma y dimensiones de los barrotes van a continuación:

Forma y dimensiones del barrote:	μ
Sección rectangular de 62 × 6,2 mm	7,1
» » » 76 × 6,6 mm	6,2
» » » 43 × 1,5 mm	1,0
» » (aristas biseladas) de 50 × 6,5 mm	6,1
» » » » de 71 × 6,5 mm	6,1

Interesa, especialmente, el conocimiento de esta pérdida para calcular el peralte que producen las rejillas en la cámara de carga de las turbinas, pues ahí las velocidades son pequeñas y puede aceptarse que el peralte es, simplemente, la pérdida de carga.

EJEMPLO.—En un canal de sección rectangular de *3* m. de ancho escurre un gasto de *2,5* m.³:s. con una altura de *1,2* m., en movimiento uniforme. Se desea saber qué peralte sufrirá aguas arriba de una rejilla de barrotes de sección rectangular de *0,01* m. de ancho, que dejan un claro de *0,02* m. si la rejilla es normal a la corriente.

Tenemos, pues: $s = 0{,}01$, $b = 0{,}02$ y, por lo tanto: $\frac{b}{s+b} = 0{,}67$. Interpolando en la tabla *a*) obtenemos: $\lambda = 0{,}92$ y por lo tanto la pérdida de carga, siendo la velocidad final $U = \frac{2{,}5}{3 \times 1{,}2} = 0{,}694$ y $\frac{U^2}{2g} = 0{,}025$, vale:

$$\Delta = 0{,}92 \times 0{,}025 = 0{,}023 \text{ m.}$$

El peralte que produce la rejilla en el nivel del agua, según las experiencias de Munich, es, prácticamente, *2,3* cm.

La fórmula de Lindquist, para la forma más aproximada, hubiera dado $\Delta = 0{,}02$ m. aproximadamente.

69. Codos y curvas.—En los cambios de dirección de una corriente abierta, se produce, además de los frotamientos, una pérdida de carga, cuya causa nos es desconocida. Algunos autores la atribuían, especialmente en los codos, a una contracción de entrada. En corrientes abiertas la superficie libre de una sección en codo o curva no es horizontal, sino que es más alta al lado exterior, debido a que las velocidades del lado interior aumentan, y disminuyen las del lado externo, variando en sentido contrario las cotas piezométricas (1) que son función de la altura. Además, se genera, por la curvatura, una aceleración centrípeta, debida al cambio de dirección que se manifiesta por la fuerza de inercia que es la fuerza centrífuga (*fig. 153*). Las partículas líquidas que tienden a seguir trayectorias rectas se acumulan al lado externo sobreponiéndose, perdiendo parte de su altura de velocidad y aumentando la cota piezométrica. Lo inverso sucede al lado interno de la curva. El fenómeno que se produce tiene contacto con el caso de equilibrio sólido por rotación en torno de un eje vertical. Naturalmente, las velocidades de la práctica son pequeñas e inicialmente muy desiguales, de manera que se verifican muchos deslizamientos de filetes, lo que produce frotamientos internos relativamente grandes, aunque quizás menores que en una corriente recta.

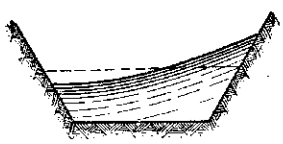

Fig. 153

Como generalmente se trata de ríos o corrientes que dependen de aguas abajo, la pérdida de carga se traduce en un peralte del eje hidráulico anterior a la singularidad.

(1) Idéntica a la observada por Yarnell y Pannell.

Daremos aquí, únicamente, las expresiones experimentales que suelen darse para el cálculo de la pérdida de carga.

En codos de *90°* dice Merriman que se pierde una altura de velocidad, que puede computarse en la final. No hay experiencias de ángulos distintos, de modo que dada la coincidencia de la pérdida de carga del codo de *90°* de un canal con la que indica Weisbach para tubos de diámetro superior a *10* cm., se puede tomar el mismo valor del coeficiente λ dado allá por ese autor, para los distintos ángulos.

En curvas en canales han dado expresiones varios autores. Boussinesq da para canales de gran ancho l, y poca altura h, cuyo radio de curvatura medio ρ la fórmula:

$$\lambda = \frac{0{,}006}{h}\sqrt{\frac{l}{\rho}} \qquad (40$$

Según Humphreys Abbot la pérdida en una curva tendrá un coeficiente de resistencia:

$$\lambda = 0{,}5\ n\ sen^2\ \alpha \qquad (41$$

en que n es el número de lados de un polígono que se puede inscribir en el eje de la curva con ángulo α de más o menos *30°* entre sus lados. Esta expresión es deducida de experiencias hechas en el Mississippi, y podría escribirse: $\lambda = 0{,}125\ n$.

Hughes y Safford dicen que no hay una ecuación satisfactoria para calcular la pérdida de carga de una curva de un canal y que comúnmente se estima en media altura de velocidad.

Los canales excavados en laderas, tienen, frecuentemente, un trazado sinusoidal de curvas y contracurvas continuadas. Estimando, según las experiencias y expresiones de Scobey (1) el aumento sobre los frotamientos, de la pérdida de carga, que un trazado de esta naturaleza ocasiona en la corriente, se puede calcular la pérdida por metro corrido debida a las curvas continuadas.

En efecto, en paredes revestidas de concreto, se deduce de las observaciones de Scobey, que el cálculo de la sección del canal puede hacerse usando un coeficiente de rugosidad n de Kutter *0,003* mayor y en paredes de tierra *0,006* mayor que en un canal recto.

Usando el valor de C de Manning (2) $C = \frac{R^{\frac{1}{6}}}{n}$, la pérdida de carga por metro corrido, suma de frotamientos y pérdidas por curvas, llamando m el aumento de n, sería:

$$J_1 = \frac{U^2 (n+m)^2}{R^{\frac{4}{3}}}$$

(1) The flow of water in irrigation channels, 1915, págs. 47 y siguientes.

(2) Véase capítulo siguiente fórmula (7.

Restando los frotamientos se tendría la pérdida de carga debida a las curvas continuadas por metro corrido:

$$\Delta = \left[(n+m)^2 - n^2\right] \frac{U^2}{R^{\frac{4}{3}}} \qquad (42$$

o sea, un coeficiente de resistencia de:

$$\lambda = \frac{2g}{R^{\frac{4}{3}}} \left[(n+m)^2 - n^2\right] = \frac{2g}{R^{\frac{4}{3}}} \cdot (2nm + m^2) \qquad (43$$

Poniendo los valores de m dados arriba y los de n correspondientes a concreto y tierra, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Canal de concreto} & (n=0{,}013;\ m=0{,}003) & \lambda = \dfrac{0{,}0017}{R^{\frac{4}{3}}} \\ \text{Canal de tierra} & (n=0{,}027;\ m=0{,}006) & = \dfrac{0{,}0039}{R^{\frac{4}{3}}} \end{array}\right\} \quad 43\,a$$

Con los distintos radios hidráulicos se tendrá:

		R =	0,20	0,50	1 m
λ en	concreto	=	0,015	0,0043	0,0017
	tierra	=	0.033	0,0100	0,0039

(*Continuará*)