

MODELO DE EQUILIBRIO ESTOCÁSTICO PARA ASIGNACIÓN CONJUNTA DE TRANSPORTE PÚBLICO Y PRIVADO

Cristián E. Cortés, Universidad de Chile, ccortes@ing.uchile.cl
Pedro Jara-Moroni, Universidad de Santiago de Chile, pedro.jara@usach.cl
Eduardo Moreno, Universidad Adolfo Ibañez, eduardo.moreno@uai.cl
Cristobal Pineda, Universidad de Chile, crpineda@ing.uchile.cl

RESUMEN

Se presenta un modelo de equilibrio estocástico para asignación conjunta de sistemas de transporte público y privado. El modelo conjunto se nutre del modelo de Equilibrio Estocástico de Transporte Público y del modelo de Equilibrio Markoviano de Transporte Privado. La elección modal se representa mediante un logit multinomial. Distinguimos entre usuarios que sólo tienen disponibilidad de transporte público y usuarios que pueden acceder a ambos sistemas de transporte. Se provee un algoritmo de implementación del modelo y se presenta algunos resultados numéricos en una red real.

Palabras claves: equilibrio estocástico, asignación conjunta, transporte público y privado

ABSTRACT

We present a transit-traffic joint assignment stochastic equilibrium model. The joint model feeds from the Stochastic Transit Equilibrium and the Markovian Traffic Equilibrium models. Modal choice is modeled by a multinomial logit model. We differentiate between users that can only use the transit system and users that may choose between both systems. We provide an implementation algorithm of the model and we present some results in a real network.

Keywords: stochastic equilibrium, joint assignment, transit and traffic

1. INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas, la modelación de las redes urbanas ha tenido un gran auge, a medida que las ciudades se hacen más grandes en términos de población, y por lo tanto, las necesidades de transporte experimentan alzas considerables. Por lo tanto, el uso de modelos para la planificación urbana, que permitan evaluar políticas que mejoren el bienestar de la población, se hace altamente importante. Uno de los tantos ámbitos que componen la modelación de redes urbanas tiene relación con reproducir el comportamiento observado de las personas frente a los sistemas de transporte público y privado, con los llamados modelos de asignación y equilibrio. Por un lado, como usuarios del transporte público, se busca reproducir la elección de paradas y rutas, en términos de líneas de buses utilizadas. Por otro, en el rol de automovilistas, se trata de reflejar la elección de rutas en el espacio vial urbano.

La literatura existente sobre modelos de asignación en modos únicos es amplia, más aún en el caso del transporte privado, los que generalmente incluyen el principio de Wardrop, que indica que los usuarios racionales escogerán aquellas rutas que minimicen sus tiempos de traslado. A su vez, muchos de los modelos de asignación existentes para transporte público han adoptado este principio. Sin embargo, entre el transporte público y el transporte privado existe una diferencia irremediable: mientras que para el transporte privado, basta con escoger aquella ruta que minimice el tiempo esperado de viaje en el vehículo, en la dimensión del transporte público la ruta queda definida por el bus en particular que abordan los usuarios, de una gama de opciones entre las diferentes líneas que sirven un paradero, y que pueden utilizarse para llegar al destino requerido. Luego, además de considerar el tiempo de viaje en el vehículo, en la dimensión del transporte público también juega un papel importante el tiempo de espera, que está ligada a otras variables intrínsecas de todo sistema, como son la frecuencia y la capacidad de los buses.

En términos del comportamiento de usuarios del transporte público, la literatura reciente ha estado orientada a modelar las preferencias asumiendo que ellos eligen una estrategia de elección de ruta para realizar sus viajes. Originalmente, Spiess y Florian (1989) definen una estrategia como un conjunto de reglas que, cuando son aplicadas, permiten a un pasajero alcanzar su destino, y las decisiones son tomadas en cada nodo intermedio donde se aborda un bus. Una estrategia bien formulada incluye la elección del conjunto de líneas atractivas en una parada, como lo describen Chriqui y Robillard (1975), y además, esta noción implica que los usuarios tengan un conocimiento acabado sobre la estructura de red y las condiciones existentes para reconocer y utilizar las estrategias efectivas (Bouzaïene-Ayari et al., 2001). El problema de minimización del costo generalizado esperado para los pasajeros del transporte público puede ser modelado como un equilibrio de usuario en el espacio de las hiperrutas, concepto introducido por Nguyen y Pallotino (1988). Una hipertuta es un grafo acíclico que conecta un origen con un destino, y que refleja una estrategia a seguir por un usuario. Esta descripción permite asimilar el problema de asignación en transporte público a un problema estándar de equilibrio en transporte privado.

Los estudios pioneros en esta materia dejaron de lado un aspecto relevante en la asignación de pasajeros, que es la congestión que se produce en paraderos cuando la capacidad de los buses no es suficiente para servir la demanda. Los primeros modelos (Nguyen y Pallotino, 1988; Spiess y Florian, 1989) funcionan razonablemente bien en escenarios con baja demanda en paraderos, pero si este no es el caso, entonces puede darse que existan pasajeros que no podrán abordar el primer

bus que pertenezca a su conjunto de líneas atractivas, por lo que sus tiempos de espera se incrementarán. De Cea y Fernández (1993) incorporan la congestión en las paradas de bus, asumiendo que los pasajeros viajan a través de una secuencia de nodos intermedios, permitiendo elecciones entre varias líneas en un paradero solo si todas ellas comparten la próxima parada a servir. Sin embargo, el conjunto de líneas comunes son computadas en forma heurística, y por lo tanto, no se garantiza alcanzar las condiciones de equilibrio. Cominetti y Correa (2001) desarrollan un modelo de equilibrio basado en hiperrutas que incorporan explícitamente los efectos de congestión mediante un modelo de cola en paraderos. Además, el modelo de equilibrio general permite múltiples orígenes y destinos, líneas de buses traslapadas en ciertos segmentos de ruta, y trasbordos en nodos intermedios. La resolución del modelo se realiza mediante un enfoque de programación dinámica, y los autores son capaces de establecer la existencia del equilibrio en la red. Cepeda et al. (2006) extienden el modelo anterior, obteniendo una nueva caracterización del equilibrio mediante la formulación de un problema de optimización, lo cual da paso a una función "gap" computable que se hace igual a cero cuando se alcanza el equilibrio. Estos modelos consideran que los usuarios siempre escogen la hiperruta o estrategia óptima, que minimizan sus costos generalizados de viaje, por lo que se trata de asignaciones de tipo deterministas.

Cortés et al. (2013) proponen un modelo de equilibrio estocástico en transporte público con congestión, llamado *stochastic transit equilibrium (STE)*, reflejando la propia percepción que tienen los pasajeros sobre el sistema. El modelo es una extensión de los desarrollos de Cominetti y Correa (2001) y de Cepeda et al. (2006), con la inclusión de la estocasticidad mediante una distribución de probabilidades al momento de abordar un bus de alguna línea en específico, la cual puede caracterizarse por la frecuencia observada en una parada determinada, y el tiempo de viaje hasta la próxima parada.

En el terreno de la asignación de vehículos en redes de transporte privado, la tendencia ha sido desarrollar modelos estocásticos, donde existe variabilidad entre los usuarios al percibir los costos. Esta línea de investigación parte con Dial (1971), con un modelo de asignación sin considerar efectos de congestión, y en el cual la demanda para cada par origen-destino es distribuida mediante un modelo de elección discreta de tipo logit basado en rutas. Este modelo fue extendido por Fisk (1980) para costos dependientes de los flujos, el cual deriva en una formulación equivalente de un problema de optimización. El supuesto detrás de estos modelos es que el término del error en los costos de rutas son variables aleatorias Gumbel independientes. Desde luego, este supuesto es altamente improbable cuando existen rutas traslapadas, y por ello, Daganzo y Sheffi (1977) proponen un modelo alternativo basado en asignaciones estocásticas con una formulación probit, resuelto mediante simulaciones.

Los modelos previamente descritos para asignación estocástica en transporte privado comparten en general un concepto: están basados en rutas, y por ello, se asume que los usuarios escogen una ruta óptima a priori, desde sus lugares de partida. Para la modelación, esto presenta varios problemas. Primero, en los modelos basados en asignaciones logit o probit, siempre habrá probabilidad de escoger una ruta, aún cuando ésta presente un costo muy alto con respecto a las demás. Segundo, estas asignaciones asumen independencia entre las rutas, aún cuando hayan segmentos traslapados entre dos o más de ellas, en una evidente correlación. Y finalmente, estos modelos requieren enumeración de rutas, las que pueden llegar a ser impracticable computacionalmente para redes extensas. Por ello, Baillon y Cominetti (2008) proponen un modelo de asignación estocástica basado

en elección discreta, pero ya no basado en elección de rutas, sino que en un proceso secuencial de elección de arcos en cada nodo intermedio.

En la formulación de modelos de equilibrios para redes multimodales, han habido avances importantes durante los últimos 25 años (Florian, 1977; Florian y Spiess, 1983; Wong, 1998). Estos modelos asumen que los pasajeros escogerán solo un modo -también llamados *modos puros*- para hacer el viaje completo, como subirse al bus o escoger el automóvil, y utilizan una formulación logit para obtener la proporción de viajes en cada modo, de acuerdo al costo generalizado de cada una de las alternativas. Sin embargo, durante los últimos años, la tendencia ha sido atraer pasajeros al transporte público y sacar automóviles de las calles, por lo que han proliferado en los núcleos urbanos los sistemas llamados *park'n ride*, donde la primera parte del viaje se realiza en automóvil, y luego el viaje es completado en algún otro modo de transporte público, los que pueden ser trenes, buses, o metro. Son los llamados *modos combinados*. El incentivo a escoger estos modos combinados por parte de los pasajeros está relacionado con la congestión en las calles, frecuencia y precio de los servicios del transporte público, y la localización de los estacionamientos. El equilibrio en redes que incluyan modos combinados no ha sido una línea investigativa con grandes desarrollos, y los modelos existentes que toman en cuenta este aspecto en forma explícita son dos. Florian y Los (1979) desarrollaron un modelo que determina las matrices origen-destino para la primera parte de los modos combinados, esto es, desde el hogar hasta el estacionamiento. El objetivo es predecir cambios en los flujos dependiendo de las políticas adoptadas en torno a los estacionamientos, tales como capacidad, tarifa o infraestructura asociada a ellos. Fernández et al. (1994) presentan algunos enfoques para formular un equilibrio en redes incluyendo modos combinados, que indican la elección de nodos de transferencia mediante un modelo de logit anidado. Sin embargo, el modelo asume funciones de costos simétricas, lo que reduce la gama de aplicaciones del modelo. Para subsanar este último aspecto, García y Marín (2005) extienden el modelo previo para formulaciones de costos asimétricas, utilizando también una formulación logit anidada en dos etapas: en la primera, se describe la elección de modo por parte del usuario, y en la segunda, la elección del nodo de transferencia. Los autores asumen un principio determinista de usuario que rige el modelo de elección de ruta en cada modo.

El objetivo del presente artículo es desarrollar un modelo de equilibrio estocástico conjunto, en redes de transporte público y privado, que incorpore las interacciones entre ambos modos, en términos de tiempos de viaje y costos generalizados. Para ello, en el ámbito del transporte privado, se tomará como base el modelo MTE de Baillon y Cominetti (2008); y para redes de transporte público, el modelo a utilizar será el de equilibrio estocástico STE de Cortés et al. (2013). Ambos modelos comparten similitudes en la formulación, pues las decisiones de viaje en ambos casos son tomadas a nivel de nodo, por lo que permiten evitar la enumeración de rutas o estrategias; ambos incluyen el efecto de la congestión, tanto a nivel vehicular como a nivel de pasajeros, y ambos incluyen la estocasticidad como una parte central del modelo, lo que permite incorporar las diferentes percepciones que tiene la población sobre las características de la red, reflejando de mejor manera lo que ocurre en los grandes centros urbanos.

En las siguientes dos secciones se sintetiza los modelos STE y MTE que nutren el modelo conjunto propuesto, detallado a continuación. Luego se describen los algoritmos de resolución del modelo conjunto, mostrando una aplicación sobre una red real correspondiente a la ciudad de Iquique. Se finaliza el artículo con conclusiones y esbozos de trabajo futuro en esta investigación.

2. EQUILIBRIO ESTOCÁSTICO EN TRANSPORTE PÚBLICO (STE)

La noción de equilibrio estocástico en transporte público desarrollado por Cortés et al. (2013) extiende los lineamientos de Cominetti y Correa (2001) y Cepeda et al. (2006) de una formulación determinista, basada en la elección de las hiperrutas mínimas. El enfoque de este modelo genera un problema de líneas comunes estocástico, en el cual cada línea tiene una probabilidad de ser escogida por un pasajero, aún cuando la calidad del servicio ofrecido sea muy baja. La formulación también incorpora restricciones de capacidad en paraderos. Una diferencia significativa de esta formulación es que no es necesario la enumeración de estrategias como herramienta de modelación, pues los valores de tiempo esperado a destino pueden ser analíticamente encontradas junto con los flujos en cada línea en el equilibrio, resolviendo un conjunto de problemas de líneas comunes simultáneamente, interrelacionados mediante restricciones de conservación de flujo en cada nodo.

Consideremos un grafo dirigido $G = (N, A)$, y denotemos por i_a y j_a al nodo cola y nodo cabezal de un arco $a \in A$. Sea $A_i^+ = \{a \in A : i_a = i\}$ y $A_i^- = \{a \in A : j_a = i\}$ los conjuntos de arcos salientes y entrantes desde el nodo $i \in N$ respectivamente. Sea $d \in D \subseteq N$ el subconjunto de los nodos destinos dentro de la red. Consideremos un pasajero que viaja hasta el destino d y alcanza un nodo intermedio i en su viaje. Para salir desde i , el pasajero puede escoger uno de los arcos $a \in A_i^+$ para alcanzar el próximo nodo j_a . Sea v_a el vector de flujos de un arco, con componentes no negativas $v_{ad} \geq 0$ desagregado a nivel de destinos. Cada arco $a \in A_i^+$ está asociado a una línea de bus que sale desde el nodo i , con un valor de frecuencia observada o efectiva $f_a(v)$. Estas funciones reflejan el grado de congestión de una línea, y se caracterizan por la siguiente condición: $f_a \rightarrow 0$ cuando $v_a \rightarrow C_a$, donde C_a es la capacidad total del arco. En otras palabras, cuando una línea está totalmente congestionada, la frecuencia observada por un pasajero esperando en una parada es cero.

Un modelo estocástico debe contener la probabilidad p_a^d que tiene un pasajero de abordar un bus en una parada, que quiera dirigirse hasta el destino d , dado que un bus de la línea a está detenido en ella:

$$p_a^d = \mathbb{P}(\text{abordar un bus para alcanzar destino } d | \text{bus de la línea } a \text{ está en la parada}).$$

Cada pasajero que necesita viajar desde i hasta d compara los tiempo esperados de viaje si espera el próximo bus, denotado por τ_{id} , con respecto al tiempo de viaje si aborda el bus que está en la parada hasta el proximo nodo $t_a(v)$, sumado con el tiempo esperado de viaje desde el próximo nodo j_a hasta d , τ_{jad} , i.e.:

$$\begin{aligned} \text{si pasajero aborda el bus} &\quad \rightarrow \text{tiempo de viaje } t_a(v) + \tau_{jad}; \\ \text{si pasajero no aborda el bus} &\quad \rightarrow \text{tiempo de viaje } \tau_{id}. \end{aligned}$$

Con respecto a la caracterización de la componente estocástica del modelo, se asume que p_a^d es una función continua estrictamente decreciente, que depende de la diferencia ente ambos tiempos esperados al destino:

$$p_a^d \equiv \varphi_a(t_a(v) + \tau_{jad} - \tau_{id}) \quad (1)$$

Por otro lado, se debe cumplir una condición de conservación de flujos en cada nodo. Se denota $g_i^d \geq 0$ a la demanda (fija) por viajar desde el nodo i hasta el destino d . El *flujo entrante en el nodo*

i con destino d se define entonces como:

$$x_{id}(v) := g_i^d + \sum_{a \in A_i^-} v_{ad} \quad (2)$$

Cortés et al. (2013) asumen que para el proceso de llegada de un bus existe renovación cada vez que uno de estos vehículos llega a un paradero, y que la llegada de buses siguen una distribución Poisson. Estos supuestos conducen a una caracterización del equilibrio en transporte público como un vector de flujos factibles y tiempos de viaje esperados que satisfacen un conjunto simultáneo de problemas de líneas comunes estocásticas, relacionados entre sí mediante las restricciones de conservación de flujo, de la siguiente manera:

Definición 2.1 *Un par de vectores de flujos factibles y de tiempos esperados (v^*, τ^*) es un Equilibrio Estocástico en Transporte Público si para todo $d \in D$ e $i \in N$, con $i \neq d$ se tiene:*

$$\begin{aligned} \tau_{id}^* &= \frac{1 + \sum_{a \in A_i^+} p_a^d f_a(v^*) (t_a(v^*) + \tau_{jad}^*)}{\sum_{a \in A_i^+} f_a(v^*) p_a^d} \quad ; \\ v_{ad}^* &= x_{id}(v^*) \frac{f_a(v^*) p_a^d}{\sum_{a \in A_i^+} f_a(v^*) p_a^d}, \quad \forall a \in A_i^+; \\ p_a^d &= \varphi_a (t_a(v^*) + \tau_{jad}^* - \tau_{id}^*), \quad \forall a \in A_i^+. \end{aligned}$$

3. EQUILIBRIO MARKOVIANO EN TRANSPORTE PRIVADO (MTE)

El fundamento del modelo de equilibrio markoviano en transporte privado de Baillon y Cominetti (2008) es que los automovilistas viajan a sus destinos mediante un proceso secuencial de selección de arcos, basado en un modelo de elección discreta en cada nodo intermedio que alcanzan en su viaje. Este proceso es asimilable a una cadena de Markov con probabilidades previamente definidas para pasar de un nodo a otro. Los autores demuestran que esta formulación conduce a un problema de minimización estrictamente convexa, y se evita la enumeración de rutas, por lo que los procedimientos computacionales propuestos son efectivos aún para redes extensas.

Sean los tiempos de viaje en arcos las variables aleatorias $\tilde{t}_a = t_a + \nu_a$, donde t_a es el valor esperado del tiempo de viaje en aquel arco, y ν_a el término estocástico, que representa la variabilidad de las percepciones entre los conductores. Se asume que estos términos tienen una distribución continua, donde $\mathbb{E}(\nu_a) = 0$. Luego, el tiempo óptimo de viaje entre todas las rutas disponibles está dado por:

$$\tilde{\tau}_{id} = \min_{r \in R_{id}} \left\{ \sum_{a \in r} \tilde{t}_a \right\}.$$

Dado un destino d , un usuario llega a un nodo i , compara, en forma estocástica, los tiempos o costos generalizados de viaje usando cada uno de los arcos salientes del nodo i . Se define \tilde{z}_{ad} el tiempo o costo estocástico hasta el destino d utilizando el arco a , que corresponde a:

$$\tilde{z}_{ad} = \tilde{t}_a + \tilde{\tau}_{jad} = z_{ad} + \epsilon_{ad} \quad (3)$$

donde $z_{ad} = \mathbb{E}(\tilde{z}_{ad})$ y $\mathbb{E}(\epsilon_{ad}) = 0$. El usuario selecciona aquel arco que tenga el menor tiempo entre aquellos arcos salientes $a \in A_i^+$, según su propia percepción. Este proceso lo va repitiendo en cada nodo intermedio durante su viaje. Entonces, para cada destino $d \in D$, existe una cadena de Markov subyacente en la red representada, donde para un nodo $i \neq d$, las probabilidades de transición están dadas por:

$$p_a^d = \begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{z}_{ad} \leq \tilde{z}_{bd}, \forall b \in A_i^+) & \text{si } a = (i,j) \in A_i^+ \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

mientras que el nodo destino es un estado absorbente de la cadena, i.e. $P_{(d,d)}^d = 1$.

Basta saber con que la probabilidad de utilizar el arco a desde el nodo i puede expresarse como:

$$\mathbb{P}(z_{ad} \leq z_{a'd} \quad \forall a' \in A_i^+) = \frac{\partial \varphi_{id}}{\partial z_{ad}}(z_d) \quad (4)$$

donde $\varphi_{id}(\cdot)$ son las funciones de tiempo esperado de viaje:

$$\varphi_{id}(z_d) \equiv \mathbb{E} \left(\min_{a \in A_i^+} \{z_{ad} + \epsilon_{ad}\} \right) \quad (5)$$

Estas funciones φ_{id} , que son no decrecientes por componentes y cóncavas, están determinadas por las variables aleatorias ϵ_{ad} , y a su vez, por las variables ν_a . Las funciones que pertenecen a esta clase, denotada por \mathcal{E} , y en donde $\varphi_{dd} \equiv 0$, admiten una caracterización analítica, como se verá más adelante.

Con estos elementos, es posible describir las ecuaciones de Bellman de programación dinámica, de la forma $\tilde{\tau}_{id} = \min_{a \in A_i^+} \tilde{z}_{ad}$. Tomando esperanza a ambos lados de la ecuación, se tiene que:

$$\begin{cases} z_{ad} = t_a + \tau_{jad} \\ \tau_{id} = \varphi_{id}(z_d) \end{cases}$$

las cuales pueden expresarse solo en términos de las variables τ_{id} :

$$\tau_{id} = \varphi_{id}((t_a + \tau_{jad})_{a \in A}). \quad (6)$$

Por otro lado, utilizando la misma notación que para el modelo STE, la condición de conservación de flujo en cada nodo requiere que:

$$x_{id} = g_{id} + \sum_{a \in A_i^-} v_{ad} \quad (7)$$

El flujo esperado x_{id} se distribuirá entre los distintos arcos a siguiendo la relación:

$$v_{ad} = x_{id} \cdot p_a^d. \quad (8)$$

Las restricciones (7) y (8) pueden reescribirse utilizando una ecuación vectorial:

$$x_d = g_d + P^t \cdot x_d \quad (9)$$

donde P es la matriz que contiene las probabilidades que distribuyen el flujo x_{id} . Luego, computando las variables z_{ad} y las probabilidades en P , es posible resolver un sistema lineal de tipo *sparse* $(I - P^t)x_d = g_d$ para encontrar los flujos en cada arco.

Baillon y Cominetti (2008) utilizan, para pruebas en redes de gran tamaño, una formulación de tipo BPR para los tiempos en arcos para incluir el efecto de la congestión, y una formulación de tipo logit para la función $\varphi(\cdot)$ de parámetros β_{id} :

$$\varphi_{id}(x) = -\frac{1}{\beta_{id}} \ln(e^{-\beta_{id}x_1} + \dots + e^{-\beta_{id}x_n}) \quad (10)$$

obteniendo

$$\tau_{id} = -\frac{1}{\beta_{id}} \ln \left(\sum_{j:(i,j) \in A} e^{-\beta_{id}z_{ad}} \right), \quad (11)$$

$$p_a^d = \frac{e^{-\beta_{id}(t_a + \tau_{jad})}}{\sum_{a':i_{a'}=i_a} e^{-\beta_{id}(\tau_{a'} + \tau_{j_{a'}d})}}. \quad (12)$$

El modelo MTE es suficientemente flexible para utilizar otras formulaciones para la asignación. En particular, es posible realizar asignaciones de tipo mixto, donde en ciertos nodos exista una asignación determinista, y en otros, estocástica. Además, en el modelo pueden incluirse procesos de decisión más complejos, como la posibilidad de no realizar un viaje si se consideran demandas elásticas: bastaría con adicionar un arco de no-viaje que conecte directamente el origen con el destino, con costo igual a la inversa de la función de demanda.

4. MODELO DE EQUILIBRIO CONJUNTO

Tomando el modelo STE para la resolución del equilibrio estocástico en transporte público por un lado, y el modelo MTE para el mismo caso, pero en la red de transporte privado por otro, se presenta ahora una modelo de equilibrio conjunto para ambos modos, los que interactúan a nivel de demanda en cada par origen-destino y en los tiempos en arcos, pues ambos modos utilizan la misma infraestructura vial. La idea detrás de este modelo es la siguiente: los usuarios realizan una elección modal en el nodo de origen, antes de comenzar el viaje. Aquellos usuarios en la red de transporte privado, tienen la posibilidad de escoger si utilizar el auto, manteniéndose en esta red, o utilizar el bus, traspasándose a la red de transporte público. A su vez, los usuarios que sólo tienen disponibilidad de bus son *usuarios cautivos* de esta última red.

4.1. Elección Modal

El primer paso del modelo de equilibrio conjunto es la elección modal para los usuarios que tienen disponibilidad para viajar en automóvil o bus. Aquella elección se realiza mediante una función

logit, que toma en cuenta la utilidad de viajar en una u otra red. Estas funciones de utilidad, denotadas por U_{id}^m para el origen i y el destino d en el modo m , pueden contener los tiempos de viaje esperados τ_{id}^m de la red respectiva, los costos monetarios de utilizar cada modo -tarifa, precio del combustible, etc.-, y otros aspectos que involucran la elección modal, como el confort o hacinamiento en los vehículos. Para diferenciar ambas redes, se agregará un superíndice a aquellas variables en común de ambos modelos descritas en los capítulos anteriores, denotando con $m = B$ a las variables pertenecientes a la red de transporte público; y con $m = C$ a las variables de la red de transporte privado.

Sea G_{id}^B la variable que denota a la cantidad de usuarios que sólo tienen disponibilidad de bus entre el par id , y sea G_{id}^C la variable que denota la cantidad de usuarios que pueden escoger libremente entre el auto o el bus para realizar el viaje en el mismo par. Luego, en el equilibrio, las demandas en ambas redes que alimentarán los modelos STE y MTE respectivamente, serán las siguientes:

$$g_{id}^{B*} = G_{id}^B + G_{id}^C \cdot \frac{e^{U_{id}^{B*}}}{e^{U_{id}^{B*}} + e^{U_{id}^{C*}}} \quad (13)$$

$$g_{id}^{C*} = G_{id}^C - G_{id}^C \cdot \frac{e^{U_{id}^{B*}}}{e^{U_{id}^{B*}} + e^{U_{id}^{C*}}}, \quad (14)$$

donde $G_{id}^C \cdot \frac{e^{U_{id}^{B*}}}{e^{U_{id}^{B*}} + e^{U_{id}^{C*}}}$ es la cantidad total de usuarios que, observando los costos de viajar en ambas redes, prefieren utilizar el bus, y traspasarse desde la red de transporte privado a la de transporte público.

4.2. Implementación y Resultados

El algoritmo propuesto para obtener el equilibrio conjunto en transporte público y privado está basado en el Método de los Promedios Sucesivos (MSA). Se trata de un modelo iterativo, en donde al inicio de cada iteración, además de calcular los tiempos en arcos y las frecuencias efectivas según la red donde corresponda, computa cuales son los niveles de demanda para cada red a través del cálculo de las funciones de utilidad respectivas para cada modo, tomando como referencia los niveles de servicios obtenidos en la iteración anterior. Luego, con esos datos de entrada, el algoritmo está diseñado para que puedan resolverse equilibrios parciales en cada red por separado para los modelos STE y MTE, los que pueden resolverse en forma paralela y no necesariamente secuencial. El algoritmo compara los vectores de flujos resultantes con respecto a la asignación de la iteración anterior hasta alcanzar un criterio de convergencia previamente definido en base a similaridad de los flujos. La estructura principal de resolución del equilibrio conjunto se muestra en el algoritmo 1, y los módulos de resolución de los equilibrios locales para los modelos STE y MTE se muestran en los algoritmos 2 y 3 respectivamente.

Podemos asegurar la convergencia del método MSA en el algoritmo 1 si el tamaño del paso α_k satisface las siguientes condiciones (Sheffi, 1985):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty \quad (15)$$

Algoritmo 1 Implementación del Modelo de Equilibrio Conjunto

- 1: Realizar una asignación inicial $v^{C,0}$ y $v^{B,0}$ en ambas redes
- 2: Fijar $k \leftarrow 0$.
- 3: **repeat**
- 4: Fijar $k \leftarrow k + 1$.
- 5: Computar demandas:

$$g_{id}^{B,k} = G_{id}^B + G_{id}^C \cdot \frac{e^{U_{id}^{B,k-1}}}{e^{U_{id}^{B,k-1}} + e^{U_{id}^{C,k-1}}}$$

$$g_{id}^{C,k} = G_{id}^C - G_{id}^C \cdot \frac{e^{U_{id}^{B,k-1}}}{e^{U_{id}^{B,k-1}} + e^{U_{id}^{C,k-1}}}$$

- 6: Computar frecuencias efectivas $f_a^k = f_a(v^{B,k-1})$.
- 7: Computar tiempos de viaje $t_a^{C,k} = t_a(v^{C,k-1})$.
- 8: **Resolver equilibrio STE** (ver alg. 2)
- 9: **Resolver equilibrio MTE** (ver alg. 3)
- 10: **until** $\frac{\|\hat{v} - v^{k-1}\|}{\|\hat{v}\|} < \epsilon$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty \quad (16)$$

Para la prueba del algoritmo de equilibrio conjunto, se implementó el código en lenguaje C++, y se utilizó una red codificada de la ciudad de Iquique, proporcionada por la Secretaría de Planificación de Transporte (SECTRA) del Gobierno de Chile. Esta red se compone de 72 zonas o centroides, 485 nodos y 2.180 arcos viales. En el caso de la red de transporte público, incluye 2.118 segmentos de línea, que utilizan los mismos arcos de la red del modo auto, y no existen vías exclusivas para buses. Ambos sistemas tienen matrices de demanda total G_{id}^C y G_{id}^B correspondientes al periodo de punta mañana, con un total de 10.646 veh/hr y 5.449 pax/hr respectivamente.

Para el modelo STE, se utilizó una formulación logística para la probabilidad de abordar p_a^d , del tipo $\frac{1}{1+e^{\theta(t_a+\tau_{ja}d-\tau_{id})}}$, con parámetro $\theta = 0,5$. A su vez, para MTE la formulación estocástica es un logit con parámetros β_i^d diferenciados, según el tiempo mínimo entre pares origen-destino en condiciones de flujo libre. Estos parámetros son inversamente proporcionales a la varianza de los tiempos de viaje esperados. Entonces, al observar que el mayor valor del tiempo de viaje óptimo entre un origen y un destino dentro de la red rondaba los 30 minutos, se establecieron tres intervalos para poder utilizar valores distintos para el parámetro del logit:

$$\beta_i^d = \begin{cases} 4,5 & \text{si } 0 \leq \bar{\tau}_{id}^C < 7 \\ 1,5 & \text{si } 7 \leq \bar{\tau}_{id}^C < 14 \\ 1,0 & \text{si } \bar{\tau}_{id}^C \geq 14 \end{cases}$$

donde $\bar{\tau}_{id}^C$ denota el tiempo mínimo entre el origen i y el destino d con tiempos en arco a flujo libre en la red de transporte privado, en unidades de minutos. Esto tiene sentido, pues en viajes más largos, la varianza de los tiempos debiera ser mayor que en viajes más cortos.

Algoritmo 2 Módulo STE

- 1: **for all** destino $d \in D$ **do**
- 2: Fijar $l \leftarrow 0$.
- 3: Fijar probabilidades $p_a^{0,d} = \varphi(t_a^{B,k} - \tau_{jad}^{B,k} - \tau_{id}^{B,k})$.
- 4: **repeat**
- 5: Fijar $l \leftarrow l + 1$.
- 6: Resolver sistema lineal de ecuaciones:

$$\tau_{id}^{B,l} = \frac{1 + \sum_{a \in A_i^+} f_a^k p_a^{l-1,d} \cdot (t_a^{B,k} + \tau_{jad}^{B,l})}{\sum_{a \in A_i^+} f_a^k p_a^{l-1,d}} \quad \forall i \in N$$

- 7: Computar probabilidades $p_a^{l,d} = \varphi(t_a^k - \tau_{jad}^{B,l} - \tau_{id}^{B,l})$.
- 8: **until** $\frac{\|\tau_{id}^{B,l} - \tau_{id}^{B,l-1}\|}{\|\tau_{id}^{B,l}\|} < \epsilon$.
- 9: Fijar $p_a^{k,d} = p_a^{l,d}$
- 10: Computar flujos inducidos en arcos:

$$\hat{v}_{ad} = x_{id}^B \frac{f_a^k p_a^{k,d}}{\sum_{a \in A_i^+} f_a^k p_a^{k,d}} \quad \forall i \in N$$

- 11: **end for**
- 12: Actualizar asignación de flujos $v^{B,k} = (1 - \alpha_k)v^{B,k-1} + \alpha_k \hat{v}$.

Por otro lado, para efectos de prueba de este algoritmo, las funciones de utilidad para la elección modal sólo consideran los tiempos de viaje esperados de cada red, i.e.:

$$U_{id}^B = \tau_{id}^B \quad (17)$$

$$U_{id}^C = \tau_{id}^C \quad (18)$$

Por último, los tiempos de viaje en arco tienen una formulación del tipo BPR, crecientes en los flujos de cada arco, de la forma:

$$t_a(v) = t_a^0 \cdot \left(1 + b_a \left(\frac{v_a}{c_a} \right)^{\gamma_a} \right) \quad (19)$$

donde b_a y γ_a son parámetros de calibración. En el caso de Iquique, estos parámetros ya calibrados fueron proporcionados por SECTRA.

Los resultados de la implementación del algoritmo para la red de Iquique, en términos de la medida de la norma del vector de flujos asignados y de la evolución de la convergencia, se muestran en la fig. 1 para las primeras 100 iteraciones, con un paso MSA de $\alpha = 0,125$, que aunque no cumple las condiciones (15) y (16), el algoritmo efectivamente converge para esta instancia de prueba y lo hace empíricamente de forma más rápida que con otras formulaciones que sí cumplen con estas condiciones. En la misma figura, \bar{v}_a^k representa el promedio de los valores de los flujos en el arco a entre la iteración $k - 3$ y k .

Algoritmo 3 Módulo MTE1: **for all** destino $d \in D$ **do**2: Fijar $l \leftarrow 0$.

3: Selección de arcos útiles:

$$\lambda_a^d = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_{id}^{C,k} > \tau_{jad}^{C,k} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

4: Fijar $z_{ad}^0 = t_a^{C,k}$ para todos los arcos.5: Fijar $\tau_{id}^{C,0} = 0$ para todos los nodos y destinos.6: **repeat**7: Fijar $l \leftarrow l + 1$.8: Computar $\tau_{id}^{C,l} = \varphi_{id}(z_{ad}^{l-1})$ 9: Computar $z_{ad}^l = t_a^{C,k} + \tau_{jad}^{C,l}$.10: **until** $\frac{\|\tau_{id}^{C,l} - \tau_{id}^{C,l-1}\|}{\|\tau_{id}^{C,l}\|} < \epsilon$.

11: Computar probabilidades:

$$p_a^{k,d} = \begin{cases} \frac{\partial \varphi_{id}(z_{ad}^l)}{\partial z_{ad}^l} & \text{si } \lambda_a^d = 1 \\ 0 & \text{si } \lambda_a^d = 0 \end{cases}$$

12: Computar flujos inducidos en arcos:

$$\hat{v}_{ad} = x_{id}^C \frac{p_a^{k,d}}{\sum_{a \in A_i^+} p_a^{k,d}} \quad \forall a \in A$$

13: **end for**14: Actualizar asignación de flujos $v^{C,k} = (1 - \alpha_k)v^{C,k-1} + \alpha_k \hat{v}$.

El tiempo de ejecución del algoritmo es de 93 minutos para 100 iteraciones, con un procesador de 2.4 GHz, y con un procedimiento secuencial para los módulos de resolución de STE y MTE. En el caso de Iquique, la instancia de prueba del algoritmo de equilibrio conjunto arroja que, utilizando solo los tiempos esperados como factor en la elección modal, un 19 % de la población con disponibilidad de automóvil ocupará el transporte público para realizar sus viajes. En las figs. 2 y 3 se muestran gráficamente las asignaciones obtenidas en ambas redes, donde los arcos de color rojo son aquellos que tienen un nivel de congestión superior al 70 %. Se observa que la zona congestionada se concentra en el centro de la ciudad de Iquique, en la parte noroeste de la ciudad. En general, con los niveles de demanda que tiene esta ciudad, no se tienen altos niveles de congestión¹.

5. CONCLUSIONES

Los desarrollos presentados en este artículo pretenden establecer una nueva metodología en el campo de los modelos de equilibrio multimodales, integrando un elemento que no había sido considera-

¹No se realiza una comparación con mediciones reales de flujo de pasajeros porque el archivo con esta información pareció no ser confiable

Figura 1: Evolución de la Norma MSA en Algoritmo Equilibrio Conjunto, Red Iquique

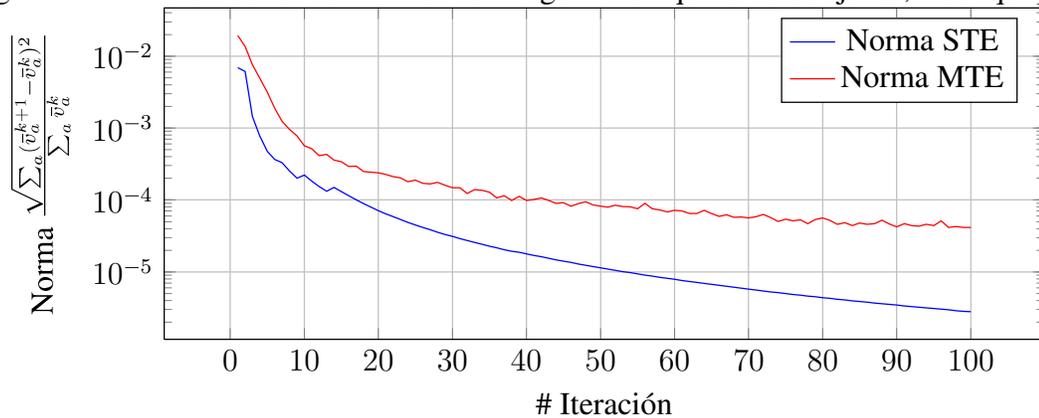
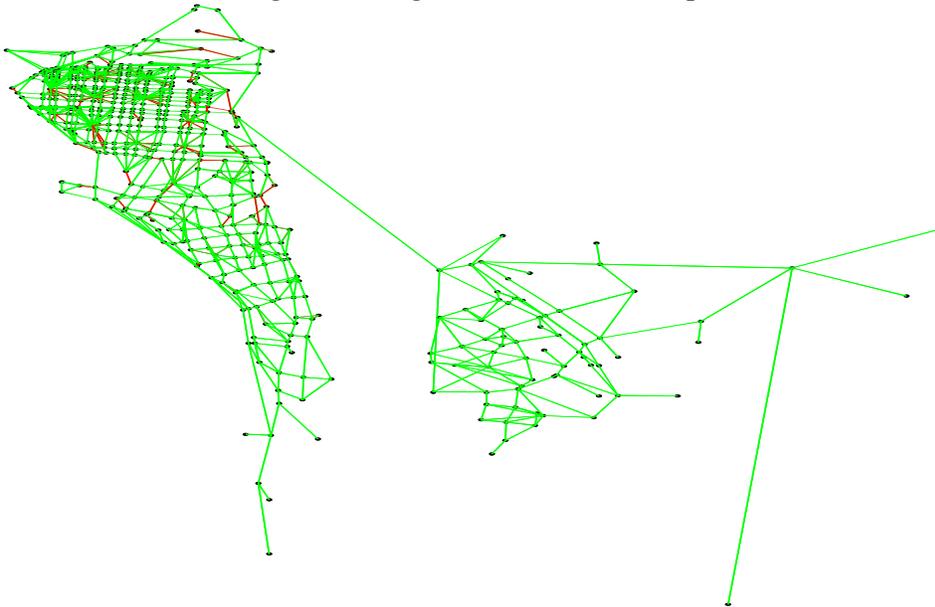


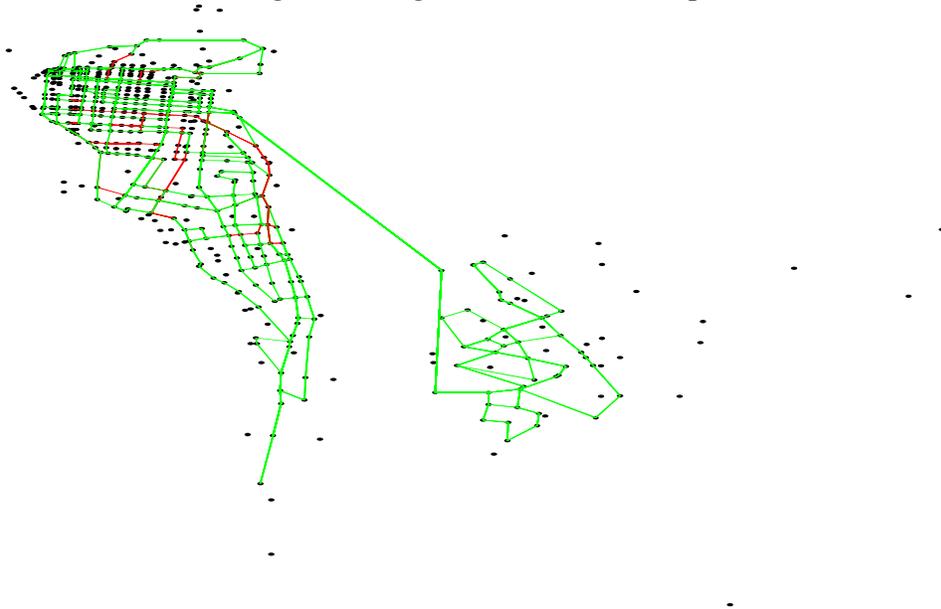
Figura 2: Asignación en Red Transporte Privado, Red Iquique



do hasta ahora: la incertidumbre que tienen automovilistas y pasajeros que utilizan los sistemas de transporte a la hora de escoger la ruta que usarán para realizar sus viajes, estableciendo que dentro de la población, el desconocimiento de las condiciones y las características físicas de la red provocan diferentes percepciones entre las personas. Utilizando modelos robustos de equilibrio en los terrenos del transporte público y privado, como son los modelos STE y MTE respectivamente, se obtuvo un modelo de equilibrio estocástico conjunto, en el cual se captura la interacción existente entre ambos modos, reconociendo que tanto los autos como los buses comparten la infraestructura vial en la ciudad.

El algoritmo general propuesto para resolver el equilibrio conjunto recoge las formulaciones y procedimientos de cada modelo individualmente, y una de las mayores ventajas que tiene es que la resolución de los equilibrios parciales es posible realizarla en forma simultánea, y no secuencial, lo que implica una reducción de tiempo de ejecución en caso de tener equipamiento computacional

Figura 3: Asignación en Red Transporte Público, Red Iquique



ad-hoc.

La existencia de equilibrio del modelo integrado escapa al alcance de este trabajo, quedando como una de las líneas de trabajo futuras de esta investigación. Asimismo, ambos modelos son, por un lado, lo suficientemente generales para integrar una mayor cantidad de información, como por ejemplo, costos monetarios al utilizar ciertos modos o medidas de confort y hacinamiento en las funciones de utilidad para la elección modal; y por otro, es posible extenderlo a modos combinados de transporte, como son los sistemas llamados *park n'ride*, estableciendo nodos de transferencia a lo largo de la red. Estos dos ámbitos motivan otros próximos pasos de esta investigación.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo financiero del Proyecto Fondecyt Chile 1100239 y 1130681, al Instituto Milenio “Sistemas Complejos de Ingeniería” (ICM: P-05-004-F, CONICYT: 522 FBO16) y al Proyecto FONDEF D10I-1002.

Referencias

- Baillon, J.R. y Cominetti, R. Markovian traffic equilibrium. **Mathematical Programming Series B**, 111(1-2):33–56, 2008.
- Bouzaïene-Ayari, B., Gendreau, M., y Nguyen, S. Modeling bus stops in transit network: A survey and new formulations. **Transportation Science**, 35(3):304–321, 2001.
- Cepeda, M., Cominetti, R., y Florian, M. A frequency-based assignment model for congested transit networks with stric capacity constrains: characterization and computation of equilibria. **Transportation Research Part B**, 40(6):437–459, 2006.

- Chriqui, C. y Robillard, P. Common bus lines. **Transportation Science**, 9:115–121, 1975.
- Cominetti, R. y Correa, J. Common-lines and passenger assignment in congested networks. **Transportation Science**, 35(3):250–267, 2001.
- Cortés, C.E., Jara-Moroni, P., Moreno, E., y Pineda, C. Stochastic transit equilibrium. **Transportation Research Part B**, 51:29–44, 2013.
- Daganzo, C.F. y Sheffi, Y. On stochastic models of traffic assignment. **Transportation Science**, 11(3):253–274, 1977.
- De Cea, J. y Fernández, F. Transit assignment for congested public transport systems: An equilibrium model. **Transportation Science**, 27(2):133–147, 1993.
- Dial, R.B. A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration. **Transportation Research**, 5:83–111, 1971.
- Fernández, E., De Cea, J., Florian, M., y Cabrera, E. Network equilibrium models with combined modes. **Transportation Science**, 28(3):182–192, 1994.
- Fisk, C. Some developments in equilibrium traffic assignment. **Transportation Research Part B**, 14(3):243–255, 1980.
- Florian, M. A traffic equilibrium model of travel by car and public transit modes. **Transportation Science**, 11(2):166–179, 1977.
- Florian, M. y Los, M. Determining intermediate origin-destination matrices for the analysis of composite mode trips. **Transportation Research Part B**, 13(2):91–103, 1979.
- Florian, M. y Spiess, H. On binary mode choice/assignment models. **Transportation Science**, 17(1):32–47, 1983.
- García, R. y Marín, A. Network equilibrium with combined modes: models and solution algorithms. **Transportation Research Part B**, 39(3):223–254, 2005.
- Nguyen, S. y Pallotino, S. Equilibrium traffic assignment for large scale transit networks. **European Journal of Operational Research**, 37(2):176–186, 1988.
- Sheffi, Y. **Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods**. Prentice-Hall, NJ, 1985.
- Spiess, H. y Florian, M. Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. **Transportation Research Part B**, 23(2):83–102, 1989.
- Wong, S.C. Multi-commodity traffic assignment by continuum approximation of network flow with variable demand. **Transportation Research Part B**, 32(8):567–581, 1998.